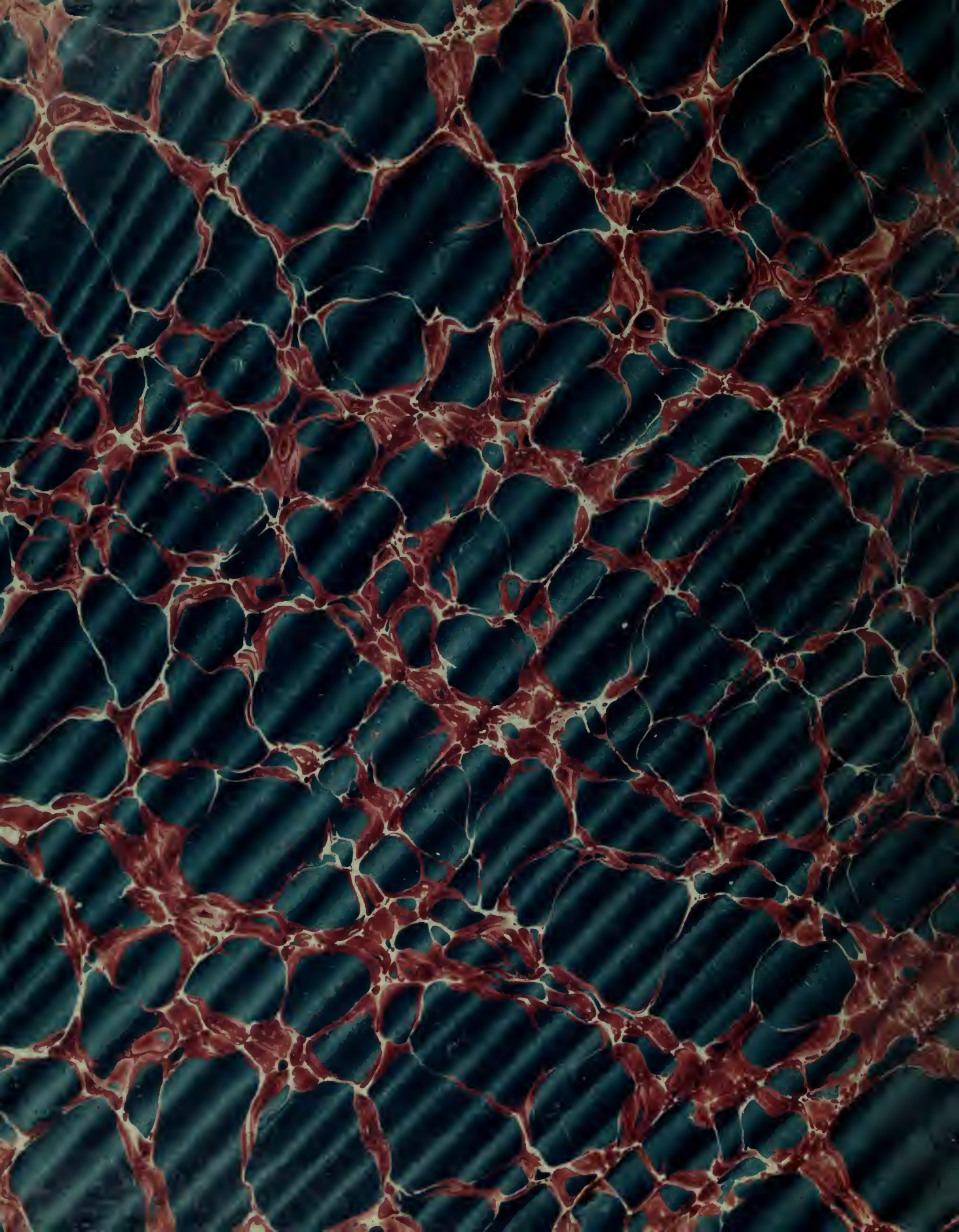


Digitized by the Internet Archive
in 2010 with funding from
University of Ottawa

http://www.archive.org/details/revuedemathmat02pari

Année 2 (1891—92)

REVUE
DE
MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

291722/9. 33
30.
QA
1
R4
année 2

ÉCOLE POLYTECHNIQUE (Concours de 1891).

99. — *On donne une parabole* P; *on porte, à partir de chacun de ses points, et dans les deux sens, sur une parallèle à une direction fixe,* Δ, *des longueurs égales à la distance de ce point au foyer de la parabole.*

1° Trouver le lieu des extrémités de ces longueurs : montrer qu'il se compose de deux paraboles P_1 *et* P_2, *et donner la raison de ce dédoublement.*

2° Démontrer que les axes des paraboles P_1 *et* P_2 *sont perpendiculaires l'un à l'autre, qu'ils pivotent autour d'un même point indépendant de la direction* Δ, *et que, quelle que soit cette direction, la somme des carrés des paramètres des deux paraboles est constante.*

3° Trouver et construire le lieu décrit par les sommets des paraboles P_1 *et* P_2, *lorsqu'on fait varier la direction* Δ.

On prendra comme axes de coordonnées l'axe et la tangente au sommet de la parabole donnée : on désignera par p *son paramètre, et par* θ *l'angle de* Δ *avec l'axe des* x.

Soient (α, β) les coordonnées d'un point M de la parabole P et soit

$$y - \beta = \operatorname{tg}\theta(x - \alpha) \tag{1}$$

l'équation de la parallèle à la direction donnée, menée par M.

La longueur MF ayant pour expression $\alpha + \frac{p}{2}$, les points du lieu cherché sont à l'intersection de la droite (1) avec le cercle défini par l'équation

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 - \left(\alpha + \frac{p}{2}\right)^2 = 0. \tag{2}$$

L'équation du lieu s'obtiendra, par suite, en éliminant α et β entre les équations (1) et (2) et la suivante :

$$\beta^2 - 2p\alpha = 0. \tag{3}$$

On tire des équations (1) et (2) $\quad \dfrac{x - \alpha}{\cos\theta} = \dfrac{y - \beta}{\sin\theta} = \varepsilon\left(\alpha + \dfrac{p}{2}\right), \qquad (4)$

ε désignant ± 1. (On pouvait d'ailleurs écrire immédiatement cette équation).

L'équation (4) donne

$$\alpha = \frac{x - \varepsilon\dfrac{p\cos\theta}{2}}{1 + \varepsilon\cos\theta},$$

$$\beta = y - \frac{\varepsilon\sin\theta}{1 + \varepsilon\cos\theta}\left(x + \frac{p}{2}\right).$$

L'équation du lieu est donc

$$\left[y - \frac{\varepsilon\sin\theta}{1 + \varepsilon\cos\theta}\left(x + \frac{p}{2}\right)\right]^2 - 2p\,\frac{x - \varepsilon\dfrac{p\cos\theta}{2}}{1 + \varepsilon\cos\theta} = 0.$$

ou

$$\left[y(1 + \varepsilon\cos\theta) - \varepsilon\sin\theta\left(x + \frac{p}{2}\right)\right]^2 - 2p(1 + \varepsilon\cos\theta)\left(x - \varepsilon\frac{p\cos\theta}{2}\right) = 0.$$

Cette équation se décompose donc en deux autres que l'on obtient en remplaçant ε par $+1$ puis par -1, à savoir :

$$[y(1+\cos\theta) - x\sin\theta - \frac{p}{2}\sin\theta]^2 - 2p(1+\cos\theta)(x - \frac{p}{2}\cos\theta) = 0, \tag{5}$$

$$[y(1-\cos\theta) + x\sin\theta + \frac{p}{2}\sin\theta]^2 - 2p(1-\cos\theta)(x + \frac{p}{2}\cos\theta) = 0. \tag{6}$$

La décomposition de l'équation du lieu en deux autres, tient à ce que α et β s'expriment rationnellement en fonction d'x et d'y, et la présence du facteur ε entraîne deux déterminations.

Remarquons d'abord que l'on peut passer de l'une de ces équations à l'autre en changeant θ en $\pi + \theta$.

On a obtenu comme lieu deux paraboles. Il est facile de prouver, *a priori*, que le lieu devait se composer de deux paraboles distinctes. En effet, si R et R′ sont les deux points du lieu qui correspondent au point M, et si l'on joint à ces points le point P, pied de la perpendiculaire abaissée de M sur la directrice, on a $MP = MR = MR'$; d'où il résulte que le triangle PRR′ est rectangle en P. Les droites PR et PR′ ont des directions fixes et le rapport de chacune d'elles à PM est constant; donc R et R′ décrivent deux paraboles.

2° L'équation (5) développée peut être mise sous la forme

$$[y(1+\cos\theta) - x\sin\theta]^2 - p(1+\cos\theta)[y\sin\theta + x(1+\cos\theta) - p\cos\theta - \frac{p}{4}(1-\cos\theta)] = 0.$$

L'axe de cette parabole a donc pour équation

$$y(1+\cos\theta) - x\sin\theta = 0;$$

l'axe de la seconde est donnée par $\quad y(1-\cos\theta) + x\sin\theta = 0.$

Ces deux droites passent par le sommet de la parabole (P) et sont rectangulaires.

Les équations des deux paraboles peuvent encore s'écrire ainsi :

$$\left(y\cos\frac{\theta}{2} - x\sin\frac{\theta}{2}\right)^2 - p\cos\frac{\theta}{2}\left[y\sin\frac{\theta}{2} + x\cos\frac{\theta}{2} + \frac{p}{4}\frac{1-3\cos^2\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}\right] = 0,$$

$$\left(y\sin\frac{\theta}{2} + x\cos\frac{\theta}{2}\right)^2 - p\sin\frac{\theta}{2}\left[y\cos\frac{\theta}{2} - x\sin\frac{\theta}{2} - \frac{p}{4}\frac{1-3\sin^2\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\right] = 0.$$

On reconnaît ainsi que les paramètres de ces deux paraboles ont respectivement pour valeurs $\frac{p}{2}\cos\frac{\theta}{2}$ et $\frac{p}{2}\sin\frac{\theta}{2}$; la somme des carrés des deux paramètres est donc constante et égale à $\frac{p^2}{4}$.

3° Le sommet de la première parabole est à l'intersection des droites représentées par les équations

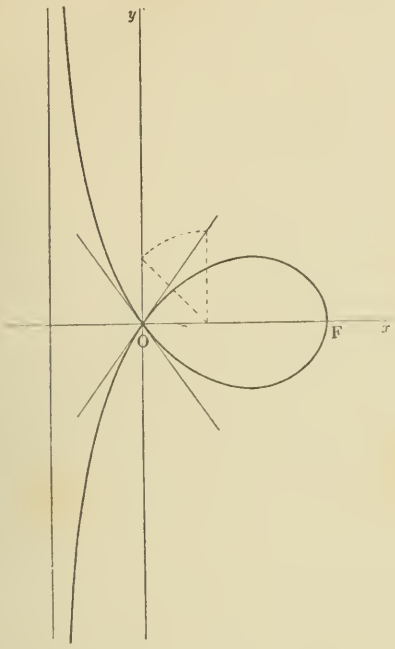
$$y\cos\frac{\theta}{2} - x\sin\frac{\theta}{2} = 0, \tag{7}$$

$$y\sin\frac{\theta}{2} + x\cos\frac{\theta}{2} + \frac{p}{4}\frac{1-3\cos^2\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}} = 0. \tag{8}$$

La première équation donne $\quad \dfrac{\cos\frac{\theta}{2}}{x} = \dfrac{\sin\frac{\theta}{2}}{y} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}},$

d'où l'on tire $\cos\frac{\theta}{2}$ et $\sin\frac{\theta}{2}$, et en substituant leurs valeurs dans la seconde équation, puis simplifiant, on obtient aisément, après suppression du facteur $\sqrt{x^2+y^2}$, l'équation suivante :

$$4\,x(x^2+y^2) - p(2x^2-y^2) = 0. \qquad (9)$$



Le lieu du sommet de la seconde parabole est le même, puisqu'on a éliminé θ entre les équations (7) et (8) et que pour passer à la seconde parabole, il suffit de changer θ en $\pi+\theta$.

La courbe représentée par l'équation (9) ne présente aucune difficulté de construction; elle est analogue à une strophoïde; le sommet de la parabole (P) est un point double; le foyer est un point simple; enfin la courbe a une asymptote réelle ayant par équation $x+\frac{p}{4}=0$; c'est une parallèle équidistante de la directrice et de la tangente au sommet de la parabole (P).

Ont envoyé des solutions exactes : MM. E. Jacquest (lycée de Dijon); G. Cunt (école Saint-Sigisbert, à Nancy); Faure (Valence); James Hais (lycée Hoche, à Versailles); George Goulle; Dumas (lycée de Lyon; C. Rech (solution géométrique et analytique.)

M. E. Jacquest a généralisé la question et obtenu l'énoncé suivant :

On considère toutes les coniques circonscrites à un triangle ABC *et telles que le pôle* μ *de* BC *par rapport à chacune d'elles décrive une conique* (S) *inscrite au triangle* ABC. *Le lieu des points d'intersection de toutes ces coniques avec la droite qui joint* μ *à un point fixe* D *de* BC, *se compose de deux coniques* S_1, S_2, *tangentes à* BC *et aussi à la deuxième tangente* DT, *menée de* D *à la conique* S. *Les coniques* S_1 *et* S_2 *sont, en outre, tangentes en* A *à la droite qui joint* A *au point* D′ *conjugué harmonique de* D *par rapport à* B *et* C. *Les points de contact de* S_1 *et* S_2 *avec* BC *forment avec* B *et* C *une division harmonique. De même, les points de contact de* S_1 *et* S_2 *avec* DT *forment avec* D *et* T *une division harmonique.*

Autre solution. — Considérons le cylindre parabolique ayant pour base la parabole donnée et dont les génératrices se projettent horizontalement et verticalement suivant des parallèles à la direction donnée. Coupons-le par les deux plans qui ont pour trace horizontale la directrice de la parabole et pour traces verticales les deux droites qui sont également inclinées sur la ligne de terre (confondue avec l'axe de la parabole) et sur la direction donnée. La construction d'un point de l'intersection avec le premier plan $P\alpha Q'$ (*fig. 1*) donne un point m, m'; m est un point du lieu, car $am = a'm' = a'\alpha$ (voir la figure, α est le pied de la directrice), puisque le triangle $a'\alpha m'$ est isocèle. De même, la projection horizontale de l'intersection avec le plan $P\alpha Q'_1$ donne le second lieu. Ceci explique déjà pourquoi l'on aura deux lieux séparés, qui sont deux paraboles. On voit immédiatement, par la construction elle-même, que $\alpha Q'$ et $\alpha Q'_1$ sont deux diamètres des paraboles; donc, les axes de ces courbes sont rectangulaires. D'ailleurs, le plan bissecteur du second dièdre étant

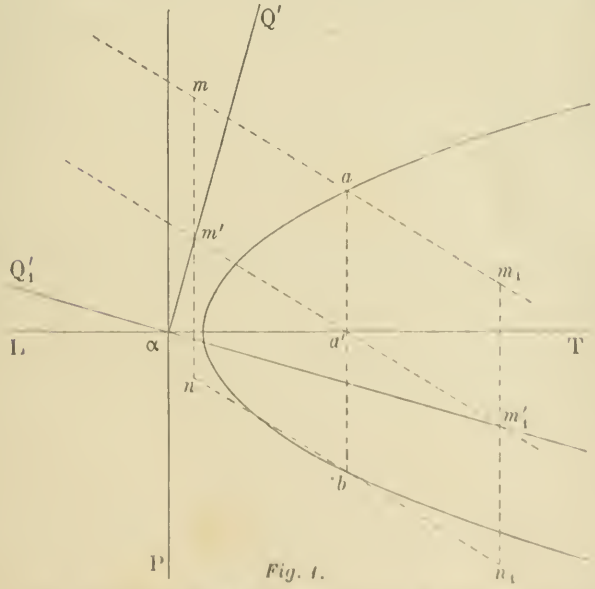


Fig. 1.

parallèle aux génératrices du cylindre est un plan diamétral et, par suite, les sections par les plans $P\alpha Q'$, $P\alpha Q'_1$ ont pour diamètres les intersections de ces plans avec le plan bissecteur. Enfin, les deux paraboles sont tangentes au contour apparent horizontal, BC, du cylindre.

Considérons *(fig. 2)* les génératrices dont les projections horizontales passent par le foyer F, leurs traces sont en D et E. Elles donnent pour les deux paraboles le point F. Pour avoir les tangentes en F, il faut prendre l'intersection des tangentes en D et en E à la parabole (P) avec la directrice et joindre le point d'intersection K au point F. Ainsi les deux paraboles sont tangentes en F et la tangente commune est perpendiculaire à la direction donnée. Par le point K, menons KI parallèle à l'axe; KI rencontre la parabole en M. La tangente en M rencontre DK en B et KE en C, qui sont des points du lieu, puisque MB = MC = MK = MF. D'ailleurs, BC est tangente en B et en C aux deux paraboles. Il en résulte que le point H appartient aux directrices de ces deux courbes; les foyers sont les projections φ et φ' de H sur BF et sur CF. Les axes sont les droites $A\varphi$ et $A\varphi'$; en effet, le quadrilatère $AH\varphi'F$ est inscriptible; il en résulte que les angles $A\varphi'F$ et AHF ou αKF sont égaux; mais αKF et KCF sont égaux, car leurs moitiés, c'est-à-dire les angles BKF et BCK ont leurs côtés perpendiculaires. Les angles $A\varphi'F$ et KCF étant égaux, $A\varphi'$ est parallèle à KE, c'est-à-dire à $\alpha Q'_1$; donc $A\varphi'$ est bien l'axe d'une des deux paraboles du lieu. On voit de même que $A\varphi$ est parallèle à DK et par suite est l'axe de l'autre parabole, car $\widehat{A\varphi B} = \widehat{\alpha KF} = \widehat{2BKF} = \widehat{DBF}$.

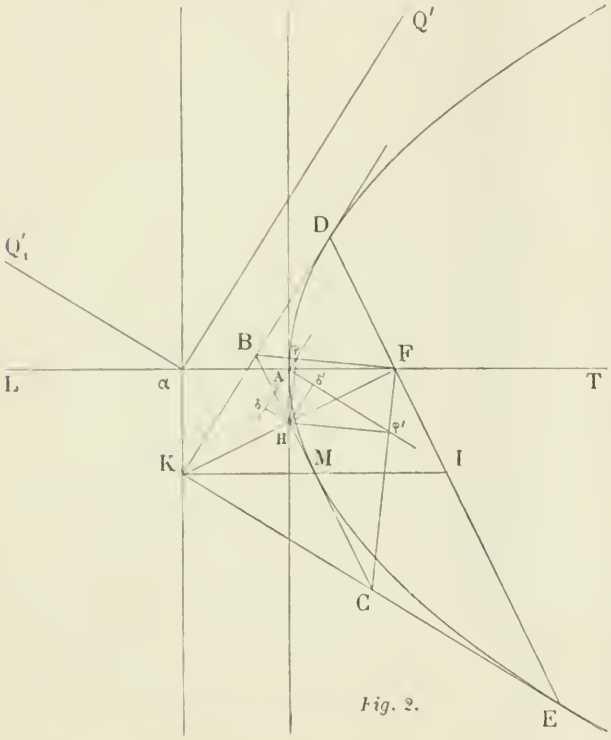


Fig. 2.

Enfin, si δ et δ' sont les projections de H sur les axes $A\varphi$ et $A\varphi'$, les paramètres sont respectivement égaux à $\delta\varphi$ et $\delta'\varphi'$. Désignons-les par q et q'.

On a
$$\overline{H\delta}^2 + \overline{H\delta'}^2 = \overline{AH}^2;$$
donc
$$q^2 + q'^2 + \overline{AH}^2 = \overline{H\varphi}^2 + \overline{H\varphi'}^2 = \overline{HF}^2,$$
d'où
$$q^2 + q'^2 = \overline{HF}^2 - \overline{AH}^2 = \frac{p^2}{4}.$$

H. Pilleux (lycée Louis-le-Grand) et André Durand (élève de l'école normale supérieure, soldat au 117e de ligne).

ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE (Concours de 1891).

101. — *Soit* (E) *une ellipse qui, rapportée à ses axes, a pour équation*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0,$$

et soient x_0, y_0 *les coordonnées d'un point* M *du plan de cette ellipse; on considère le cercle* (C) *passant par le point* M *et les points de contact* P, Q *des tangentes à l'ellipse issues du point* M.

1° Le cercle (C) *rencontre l'ellipse en deux autres points* P′, Q′; *prouver que les tangentes à l'ellipse en ces deux points se coupent en un point* M′ *situé sur le cercle; montrer que par* M, M′ *et les deux foyers réels on peut faire passer un cercle; de même par* M, M′ *et les deux foyers imaginaires.*

2° Soient I, I′, I″ *les points où se coupent respectivement les droites* PQ, P′Q′, *les droites* PQ′, P′Q, *enfin les droites* PP′, QQ′; *on suppose que le point* M *reste fixe et que l'ellipse* (E) *se déforme en gardant les mêmes foyers : on demande les lieux décrits par les points* I, I′, I″; *on propose enfin de montrer que tout cercle passant par les points* I′, I″ *est orthogonal au cercle décrit sur* MM′ *comme diamètre.*

Étant donnés deux points $M(x_0, y_0)$, $M'(x_1, y_1)$ et une conique (E), si l'on mène les tangentes MP, MQ, M′P′, M′Q′, les quatre points de contact P, Q, P′, Q′ et les deux points M, M′ sont sur une même conique.

En effet, l'équation générale des coniques passant par les quatre points de contact P, Q, P′, Q′ est

$$P_{0,x}.P_{1,x} - \lambda E = 0, \qquad (1)$$

$P_{0,x}$, $P_{1,x}$ désignant les premiers membres des équations des polaires de M et M′, et E étant le premier membre de l'équation de la conique, de sorte que

$$P_{0,x} \equiv \frac{1}{2}(x_0E'_x + y_0E'_y + z_0E'_z),$$

$$P_{1,x} \equiv \frac{1}{2}(x_1E'_x + y_1E'_y + z_1E'_z).$$

Déterminons λ de manière que la conique (1) passe par M, ce qui donne

$$P_{0,0}P_{1,0} = \lambda E_0;$$

mais $E_0 = P_{0,0}$, donc $\lambda = P_{1,0} = P_{0,1}$;

il en résulte immédiatement que la conique cherchée passe par M′. En particulier, si l'on mène un cercle par les points M, P, Q et les tangentes à la conique aux points P′, Q′ où ce cercle la coupe encore, le point de concours M′ des tangentes en P′ et Q′ sera sur le cercle considéré.

On peut remarquer que les points M, M′, I′, I″ forment une division harmonique, et toute conique passant par P, Q, P′, Q′ coupe harmoniquement I′I″; donc si cette conique passe par M, elle passera aussi par M′.

Soit $$E \equiv \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1;$$

l'équation de la conique passant par M, M′, P, Q, P′, Q′ est

$$\left(\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} - 1\right)\left(\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} - 1\right) - \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right)\left(\frac{x_0x_1}{a^2} + \frac{y_0y_1}{b^2} - 1\right) = 0$$

Exprimons que cette équation représente un cercle ; on trouve

$$x_0 y_1 + y_0 x_1 = 0,$$

$$x_0 x_1 - y_0 y_1 = c^2,$$

d'où
$$x_1 = \frac{c^2 x_0}{x_0^2 + y_0^2}, \quad y_1 = -\frac{c^2 y_0}{x_0^2 + y_0^2}.$$

Tout cercle passant par les deux foyers réels a pour équation

$$x^2 + y^2 - 2\beta y - c^2 = 0.$$

Pour que ce cercle passe par le point M, il faut donner à β la valeur

$$\beta = \frac{x_0^2 + y_0^2 - c^2}{2y_0};$$

or
$$x_0^2 + y_0^2 = -\frac{c^2 y_0}{y_1}, \qquad \text{donc} \qquad \frac{x_0^2 + y_0^2 - c^2}{2y_0} = \frac{-c^2(y_0 + y_1)}{2y_0 y_1}.$$

Cette forme symétrique montre que le cercle ayant pour équation

$$x^2 + y^2 + c^2 y \frac{y_0 + y_1}{y_0 y_1} - c^2 = 0$$

passe aussi par M′.

De même on trouve pour l'équation du cercle passant par M et par les foyers imaginaires :

$$x^2 + y^2 - c^2 x \frac{x_0 + x_1}{x_0 x_1} + c^2 = 0.$$

Ce cercle passe évidemment par le point M′.

Les équations précédentes demeurent les mêmes quand l'ellipse se déforme en conservant les mêmes foyers, si le point M reste fixe. En effet, le point M′ reste alors également fixe, puisque x_1, y_1 ne dépendent que de c et de x_0, y_0. On peut d'ailleurs remarquer que si l'ellipse s'aplatit indéfiniment, MP et MP′ ont pour limites MF, MF′ et le cercle circonscrit à MPQM′ devient à la limite le cercle circonscrit à MM′FF′. En outre les points I′ et I″ décrivent la droite MM′, et le point I, pôle de MM′ par rapport à un cercle variable passant par M et M′, décrit une droite perpendiculaire à MM′. C'est ce que l'on peut vérifier par le calcul.

L'équation de la conique (E) peut s'écrire

$$\frac{x^2}{\lambda} + \frac{y^2}{\lambda - c^2} - 1 = 0.$$

Le lieu du point I s'obtiendra en éliminant λ entre les deux équations

$$\frac{x x_0}{\lambda} + \frac{y y_0}{\lambda - c^2} - 1 = 0,$$

$$\frac{x x_1}{\lambda} + \frac{y y_1}{\lambda - c^2} - 1 = 0.$$

En calculant λ et $\lambda - c^2$, puis retranchant, on obtient

$$\frac{x}{y_1 - y_0} + \frac{y}{x_1 - x_0} = \frac{c^2}{x_0 y_1 - x_1 y_0};$$

C'est bien l'équation d'une perpendiculaire à MM′.

On met aisément cette équation sous la forme

$$\frac{x_0 x_1}{x_0 + x_1}\left(x - \frac{x_0 + x_1}{2}\right) = \frac{y_0 y_1}{y_0 + y_1}\left(y - \frac{y_0 + y_1}{2}\right),$$

ce qui montre que le lieu est la perpendiculaire élevée au milieu de MM′.

Le lieu des points I′ et I″ est évidemment la droite MM′, et comme I′ et I″ divisent harmoniquement MM′, tout cercle passant par I′ et I″ est, comme on sait, orthogonal au cercle décrit sur MM′ comme diamètre.

Camille Rech (Nancy.)

Ont envoyé des solutions analogues : MM. Goulle (George); G. Cuny (école Saint-Sigisbert, à Nancy); Faure (Valence); Pimorin (soldat au 126e de ligne, à Toulouse); A. Dumas (lycée de Lyon); Avrillier; Touren (Toulouse).
MM. Henri de Montillet et E. Jacquest (Dijon) ont envoyé une solution géométrique et une solution analytique.
M. Cheronnet (école Monge) a vérifié par le calcul la dernière partie.

Solution géométrique. — 1° Considérons l'hexagone MPQ′M′P′Q; les côtés opposés se coupent en trois points situés en ligne droite, puisqu'ils sont sur la polaire du point I″; il en résulte que les sommets M, P, Q′, M′, P′, Q sont sur une même conique. Donc si l'on suppose que cinq d'entre eux soient sur la circonférence d'un cercle, il en est de même du sixième.

Transformons homographiquement la figure, de manière que les points M et M′ aient pour transformés les points cycliques, que nous désignerons par m, m': les points P, Q, P′, Q′ deviennent les points où la conique (e), transformée de la conique (E), coupe ses directrices, de sorte que la transformée du cercle (C), qui passe par ces quatre points, et par les points cycliques m, m' est le cercle orthoptique (c) de la conique (e). Les deux foyers réels, ou les deux foyers imaginaires conjugués F, F′ deviennent deux des points f, f' où se coupent les tangentes menées à (e) par les points i, j, transformés des points cycliques I, J de la première figure. Le cercle de diamètre f, f' passe par i et j; car le cercle (c) étant la transformée de (C) passe par les transformés de I et J, d'où il résulte que des points i et j on voit la conique (e) sous un angle droit. Ainsi, l'hexagone $mm'ff'ij$ est inscriptible à une conique; il en est de même de l'hexagone MM′FF′IJ de la première figure, ce qui revient à dire que les quadrilatères formés par les points M, M′ et les foyers réels, ou les foyers imaginaires, sont inscriptibles à des cercles.

2° Les cordes PQ, P′Q′ sont symétriques par rapport à FF′; il en est de même des diamètres OM′, OM′ qui leur sont conjugués; donc M′ est sur la symétrique de la demi-droite OM par rapport à FF et tel que

$$\overline{OM}.\overline{OM'} = \overline{OF}^2.$$

Donc M′ ne dépend que de la position de M et des foyers de (E); quand cette conique se déforme en gardant ses foyers M′ reste fixe. En outre (E) restant inscrite à un quadrilatère fixe, le lieu du pôle I de la droite fixe MM′ est une droite; on voit aisément que c'est la perpendiculaire à MM′ qui, avec MM′, divise harmoniquement le segment FF′.

Les points I′ et I″, qui sont sur la polaire du point I, ont donc pour lieu MM′; ce sont d'ailleurs les points où la diagonale MM′ du quadrilatère formé par les tangentes issues de M et M′, rencontre les deux autres diagonales; par suite, ils divisent harmoniquement le segment MM′, de sorte que tout cercle passant par I′ et I″ est orthogonal au cercle décrit sur MM′ comme diamètre.

Ernest Duporcq (école Monge).

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

66. — *Etant données les équations des trois côtés d'un triangle et les coordonnées d'un point du plan de ce triangle, reconnaître dans quelle région se trouve ce point par rapport au triangle.*

Soient
$$\alpha \equiv ax + by + c = 0,$$
$$\beta \equiv a'x + b'y + c' = 0,$$
$$\gamma \equiv a''x + b''y + c'' = 0$$
les équations des côtés BC, CA, AB du triangle ABC. Posons
$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}$$
et désignons par A, B, C, A′ ... les coefficients de a, b, c, a' ... dans le développement de Δ. Les coordonnées du sommet A sont définies par les équations
$$\frac{x'}{A} = \frac{y'}{B} = \frac{1}{C}.$$

Pour qu'un point M ayant pour coordonnées x_0, y_0 soit à l'intérieur du triangle ABC, il faut et il suffit que ce point soit par rapport à BC du même côté que A; par rapport à CA du même côté que B et par rapport à AB du même côté que C. Pour exprimer par exemple que les points M et A sont dans la même région par rapport à BC, il faut exprimer que $ax_0 + by_0 + c$ et $ax' + by' + c$ ont le même signe, c'est-à-dire que le produit
$$\frac{(ax_0 + by_0 + c)(aA + bB + cC)}{C},$$
est positif. Or ce produit est égal à $\qquad (ax_0 + by_0 + c)\dfrac{\Delta}{C}.$

Par suite, pour que le point M soit à l'intérieur du triangle, on doit avoir
$$\frac{(ax_0 + by_0 + c)\Delta}{a'b'' - b'a''} > 0,$$
$$\frac{(a'x_0 + b'y_0 + c')\Delta}{a''b - b''a} > 0,$$
$$\frac{(a''x_0 + b''y_0 + c'')\Delta}{ab' - ba'} > 0.$$

On déduit de là bien facilement les inégalités caractérisant les autres régions; ainsi, pour que M soit dans l'angle A du triangle, mais à l'extérieur, il faut et il suffit que la première des inégalités précédentes soit renversée, les deux autres étant conservées; si au contraire on conserve la première et que l'on renverse les deux autres, on exprimera que le point M est dans l'angle opposé par le sommet à l'angle A du triangle.

Solution exacte : M. Abel Dumas (Lyon). — Les autres solutions envoyées ne sont pas correctes.

68. — *Construire la courbe ayant pour équation*

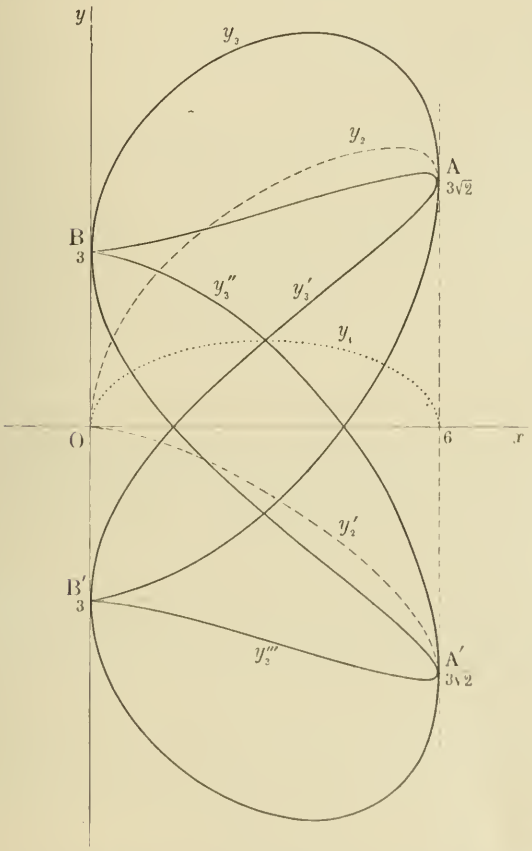
$$2y = \pm\sqrt{6x - x^2} \pm \sqrt{6x + x^2} \pm \sqrt{36 - x^2}.$$

La courbe est symétrique par rapport à Ox; il suffira donc d'en construire la moitié, et pour cela nous pouvons supposer que le premier radical a le signe $+$.

Pour que y soit réel, il faut que x soit compris entre 0 et 6. Construisons d'abord la moitié d'ellipse représentée par l'équation

$$2y_1 = +\sqrt{6x - x^2}$$

(en pointillé sur la figure), puis augmentons et diminuons les ordonnées de la quantité $\frac{1}{2}\sqrt{6x + x^2}$; on obtient ainsi deux branches de courbe partant de l'origine et aboutissant aux points A et A′ ayant pour coordonnées $x = 6, y = \pm 3\sqrt{2}$.



Pour déterminer les tangentes au point de départ, considérons x comme infiniment petit principal et cherchons la partie principale de y. En extrayant les racines carrées, on obtient

$$\sqrt{6 - x} = \sqrt{6} - \frac{x}{2\sqrt{6}} + \ldots$$

$$\sqrt{6 + x} = \sqrt{6} + \frac{x}{2\sqrt{6}} + \ldots$$

On aura donc pour les ordonnées des deux branches de courbe

$$2y_2 = \sqrt{x}\left[\sqrt{6} - \frac{x}{2\sqrt{6}} + \ldots\right] + \sqrt{x}\left[\sqrt{6} + \frac{x}{2\sqrt{6}} + \ldots\right]$$
$$= 2\sqrt{6}\sqrt{x} + \ldots$$

$$2y_2' = \sqrt{x}\left[\sqrt{6} - \frac{x}{2\sqrt{6}} + \ldots\right] - \sqrt{x}\left[\sqrt{6} + \frac{x}{2\sqrt{6}} + \ldots\right]$$
$$= -\frac{x\sqrt{x}}{\sqrt{6}} + \ldots$$

Nous voyons ainsi que la première branche est tangente à Oy et que y_2 croît au départ, tandis que la deuxième est tangente à Ox et que y décroît.

Pour étudier la courbe aux environs des points A et A′, je prends $6 - x = x'$ pour infiniment petit principal ; on a alors

$$\sqrt{6x - x^2} = \sqrt{x'}\sqrt{6 - x'} = \sqrt{x'}\left[\sqrt{6} - \frac{x'}{2\sqrt{6}} + \ldots\right]$$

$$\sqrt{6x + x^2} = \sqrt{(6 - x')(12 - x')} = \sqrt{72 - 18x' + x'^2} = 6\sqrt{2} - \frac{3}{2\sqrt{2}}x' + \ldots;$$

par suite

$$2y_2 = 6\sqrt{2} + \sqrt{6}\sqrt{x'} + \ldots$$
$$2y_2' = -6\sqrt{2} + \sqrt{6}\sqrt{x'} + \ldots;$$

donc les deux branches de courbe sont tangentes à la droite AA′, et les quantités $y_2 - 3\sqrt{2}$ et $y_2' + 3\sqrt{2}$ sont positives dans les environs des points A et A′. (Les deux branches de courbe sont représentées en traits discontinus sur la figure.)

Il ne reste plus qu'à augmenter et à diminuer les ordonnées y_2 et y'_2 de la quantité $\frac{1}{2}\sqrt{36 - x^2}$. Nous déterminons les tangentes aux points extrêmes comme plus haut, en observant que

$$\sqrt{36 - x^2} = 6 - \frac{x^2}{12} + \ldots$$

et en remplaçant x par $6-x'$ $\quad \sqrt{x'(12 - x')} = \sqrt{x'}\left[2\sqrt{3} - \frac{x'}{4\sqrt{3}} + \ldots\right]$.

On aura donc pour les quatre branches dans les environs des points B et B'

$$2y_3 = 6 + 2\sqrt{6}\sqrt{x} + \ldots, \qquad 2y''_3 = 6 - \frac{x\sqrt{x}}{\sqrt{6}} + \ldots,$$

$$2y'_3 = -6 + 2\sqrt{6}\sqrt{x} + \ldots, \qquad 2y'''_3 = -6 - \frac{x\sqrt{x}}{\sqrt{6}} + \ldots.$$

et aux environs des points A et A'

$$2y_3 = 6\sqrt{2} + (\sqrt{6} + 2\sqrt{3})\sqrt{x'} + \ldots \qquad 2y''_3 = -6\sqrt{2} + (\sqrt{6} + 2\sqrt{3})\sqrt{x'} + \ldots,$$

$$2y'_3 = 6\sqrt{2} + (\sqrt{6} - 2\sqrt{3})\sqrt{x'} + \ldots. \qquad 2y'''_3 = -6\sqrt{2} + (\sqrt{6} - 2\sqrt{3})\sqrt{x'} + \ldots.$$

Il ne reste plus qu'à prendre le symétrique de la portion obtenue par rapport à Ox.

On vérifie aisément que les branches y'_3 et y''_3 se coupent sur l'ellipse auxiliaire.

J. Perrin, lycée de Besançon.

Solutions analogues par M. E. Husson, lycée de Nancy, et L. Perrée, lycée Condorcet.

---

67. — *On considère une ellipse* E *et un point* P *situé dans son plan. Trouver le lieu du point* M *tel que les tangentes menées du point* P *et du point* M *à l'ellipse* E *forment un quadrilatère circonscriptible à un cercle.*

Soient $$a^2u^2 + b^2v^2 - w^2 = 0$$

l'équation tangentielle de l'ellipse E rapportée à ses axes, et α, β les coordonnées du point P. Soient x, y les coordonnées d'un point M du lieu. L'équation générale des coniques tangentes aux tangentes issues des points P et M à l'ellipse est

$$\lambda(a^2u^2 + b^2v^2 - w^2) + (u\alpha + v\beta + w)(ux + vy + w) = 0.$$

Écrivons que cette équation représente un cercle, c'est-à-dire que les asymptotes sont parallèles aux droites isotropes; on obtient

$$(\lambda a^2 + \alpha x)(1 - \lambda) - \frac{(\alpha + x)^2}{4} = (\lambda b^2 + \beta y)(1 - \lambda) - \frac{(\beta + y)^2}{4},$$

$$(\alpha y + \beta x)(1 - \lambda) - \frac{(\alpha + x)(\beta + y)}{2} = 0.$$

Éliminant λ entre ces deux équations, on aura l'équation du lieu.

La première peut s'écrire

$$\lambda(1 - \lambda)c^2 + (1 - \lambda)(\alpha x - \beta y) = \frac{(\alpha + x)^2 - (\beta + y)^2}{4}.$$

De la deuxième on tire $$\lambda = -\frac{(x + \alpha)(y + \beta)}{2(\alpha y + \beta x)},$$

et en remplaçant dans la première, on obtient, après simplifications,

$$c^2(x^2 - \alpha^2)(y^2 - \beta^2) = (\alpha^2y^2 - \beta^2x^2)(x^2 + y^2 - \alpha^2 - \beta^2)$$

ou encore $$c^2(x^2 - \alpha^2)(y^2 - \beta^2) = [\alpha^2(y^2 - \beta^2) - \beta^2(x^2 - \alpha^2)]\,(x^2 - \alpha^2 + y^2 - \beta^2).$$

Sous cette forme, on voit que l'équation est homogène et du deuxième degré en $x^2 - \alpha^2$ et $y^2 - \beta^2$. Elle représente donc deux coniques dont les équations s'écriront

$$\frac{y^2 - \beta^2}{x^2 - \alpha^2} = m_1, \qquad \frac{y^2 - \beta^2}{x^2 - \alpha^2} = m_2,$$

m_1 et m_2 étant les racines de l'équation

$$c^2 m = (\alpha^2 m - \beta^2)(1 + m)$$

ou $$\alpha^2 m^2 + m(\alpha^2 - \beta^2 - c^2) - \beta^2 = 0. \qquad (1)$$

Cette équation a ses racines réelles et de signes contraires.

A la racine négative m_1 correspond une ellipse réelle ayant pour équation

$$-m_1 x^2 + y^2 = -m_1\alpha^2 + \beta^2;$$

à la racine positive m_2 correspond une hyperbole définie par l'équation

$$m_2 x^2 - y^2 = m_2\alpha^2 - \beta^2.$$

Ces deux coniques passent par le point P et sont homofocales à l'ellipse donnée, puisque l'on a

$$\frac{-m_1\alpha^2 + \beta^2}{-m_1} - (-m_1\alpha^2 + \beta^2) = \frac{m_2\alpha^2 - \beta^2}{m_2} + m_2\alpha^2 - \beta^2 = c^2,$$

en vertu de l'équation (1).

Le lieu se compose donc des deux coniques homofocales à l'ellipse E, qui passent par le point donné P.

J. Perrin, lycée de Besançon.

Autres solutions par MM. Descombes (Annecy); F. Faure (Valence); A. Lecoquierre, lycée de Rouen; L. Perrée (Condorcet); J. Vigneaux, lycée de Toulouse.

Remarque. — Le résultat précédent peut s'énoncer de la façon suivante :

Pour qu'il existe un cercle tangent aux tangentes issues de deux points A *et* B *à une conique, il faut et il suffit que les deux points* A *et* B *soient situés sur une conique homofocale à la conique donnée.*

Ce théorème n'est pas nouveau, il a été donné pour la première fois par Chasles.

En faisant une transformation homographique quelconque, on obtient le théorème suivant :

Pour qu'il existe une conique passant par deux points C *et* D *et tangente aux tangentes issues de deux points* A *et* B *à une conique* S, *il faut et il suffit qu'il existe une conique passant par* A *et* B *et tangente aux tangentes issues de* C *et* D *à la conique* S.

En transformant par polaires réciproques, on obtient le nouvel énoncé suivant :

Pour qu'il existe une conique tangente à deux droites C *et* D *et passant par les points de rencontre d'une conique* S *et de deux droites* A *et* B, *il faut et il suffit qu'il existe une conique tangente aux deux droites* A *et* B *et passant par les points de rencontre de la conique* S *et des deux droites* C *et* D.

Ce dernier théorème se démontre très simplement; si on désigne par $S = 0$, $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$, $D = 0$, les équations de la conique S et des quatre droites, et si l'on suppose qu'il existe une conique tangente à C et D et passant par les points de rencontre de S et de A et B, on aura une identité de la forme

$$S + \lambda AB \equiv \mu CD + P^2,$$

d'où

$$S - \mu CD \equiv -\lambda AB + P^2,$$

ce qui démontre le théorème.

Si l'on suppose en particulier que la droite A soit la droite de l'infini et que la conique S soit un cercle, on arrive au théorème suivant :

L'enveloppe des axes radicaux de deux cercles dont l'un est fixe et dont l'autre, variable, reste tangent à deux droites fixes, se compose des deux paraboles qui passent par les points communs au cercle fixe et aux deux droites fixes.

---

71. — *Démontrer qu'il existe sur toute strophoïde oblique, dont le point double est* O, *deux points* A *et* B *tels que,* M *étant un point quelconque de la courbe, le rayon vecteur* OM *partage en deux parties égales l'angle* AMB. *Déterminer la position des points* A *et* B. *Démontrer ensuite que, si l'on décrit de* O *comme centre, avec un rayon donné* R, *un cercle qui coupe la strophoïde en* N, *ce point est, de tous ceux du cercle, celui pour lequel la somme des distances aux points* A *et* B *est maximum ou minimum.*

1° — Cherchons d'abord, étant donnés trois points quelconques A, B, O, le lieu du point M, tel que OM soit bissectrice de l'angle AMB. Prenons deux axes rectangulaires quelconques passant par le point O; soient α, β et α', β' les coordonnées des points A et B. Si x, y sont les coordonnées d'un point M du lieu, on doit avoir

$$\frac{\dfrac{y-\beta}{x-\alpha}-\dfrac{y}{x}}{1+\dfrac{y}{x}\cdot\dfrac{y-\beta}{x-\alpha}}+\frac{\dfrac{y-\beta'}{x-\alpha'}-\dfrac{y}{x}}{1+\dfrac{y}{x}\cdot\dfrac{y-\beta'}{x-\alpha'}}=0$$

ou

$$\frac{\alpha y-\beta x}{x^2+y^2-\alpha x-\beta y}+\frac{\alpha' y-\beta' x}{x^2+y^2-\alpha' x-\beta' y}=0$$

ou bien

$$(x^2+y^2)[(\alpha+\alpha')y-(\beta+\beta')x]+(\alpha\beta'+\beta\alpha')(x^2-y^2)+2(\beta\beta'-\alpha\alpha')xy=0. \qquad (1)$$

Le lieu est une strophoïde qui a pour point double le point O et qui passe par les points A et B. On la déterminera complètement en observant que les tangentes au point double sont bissectrices de l'angle AOB et que la direction asymptotique est parallèle à la droite qui joint le point O au milieu de AB.

Réciproquement, étant donnée une strophoïde quelconque, ayant le point O pour point double, existe-t-il deux points A et B, tels qu'en appelant M un point quelconque de la courbe, la droite OM soit bissectrice de l'angle AMB?

Prenons pour axes les tangentes au point double et soit

$$(x^2+y^2)(ux+vy)+xy=0 \qquad (2)$$

l'équation de la courbe. Tout revient à chercher si l'on peut déterminer α, β, α', β' en sorte que les équations (1) et (2) représentent la même courbe.

On doit avoir

$$\frac{\beta+\beta'}{u}=-\frac{\alpha+\alpha'}{v}=2(\beta\beta'-\alpha\alpha'), \qquad (3)$$

$$\alpha\beta'+\beta\alpha'=0. \qquad (4)$$

Nous avons trois équations entre quatre inconnues, le problème est donc possible et d'une infinité de manières.

La relation (4) exprime que les droites OA et OB sont symétriques par rapport aux axes, et en posant $\frac{\beta}{\alpha}=-\frac{\beta'}{\alpha'}=t$, les relations (3) donnent

$$\alpha=\frac{-t}{(t^2+1)(u+vt)}, \qquad \alpha'=\frac{t}{(t^2+1)(u-vt)},$$

qui expriment que les deux points A et B sont sur la strophoïde.

En conséquence, il existe sur toute strophoïde une infinité de couples de points A et B jouissant de la propriété énoncée; on obtient l'un de ces couples en menant par le point double deux droites

symétriques par rapport aux tangentes au point double, et ces droites rencontrent la strophoïde aux points cherchés. En outre, pour tout point M non situé sur la strophoïde la droite OM n'est pas bissectrice de l'angle AMB.

2° — Si N est un point d'intersection de la strophoïde et d'un cercle de centre O, la tangente NT au cercle étant perpendiculaire à NO est aussi bissectrice de l'angle ANB. Si NT est bissectrice extérieure de l'angle ANB, elle est tangente à l'ellipse de foyers A et B qui passe par N, en sorte que NA + NB est un maximum ou un minimum de la somme des distances des deux points A et B à un point quelconque du cercle; mais si NT est bissectrice intérieure de l'angle ANB, elle est tangente à l'hyperbole de foyers A et B et passant par N, et par suite NA — NB est un maximum ou un minimum de la différence des distances des points A et B à un point quelconque du cercle.

L. Perrée, lycée Condorcet.

Autre solution par M. Lecoquierre, lycée de Rouen.

Note. — Transformons la figure par inversion, le point double O étant le pôle; la strophoïde se transforme en une hyperbole équilatère passant par le point O et ayant ses asymptotes parallèles aux tangentes au point double. En vertu des propriétés des figures réciproques, si deux points A et B de la strophoïde jouissent des propriétés de l'énoncé, les points correspondants a et b de l'hyperbole seront tels que pour tout point m de la courbe les angles maO et mbO seront égaux. Tout revient donc à chercher sur l'hyperbole les points a et b jouissant de cette propriété.

On reconnaît d'abord qu'étant donnés trois points O, a, b, le lieu des points m tels que $\widehat{maO} = \widehat{mbO}$, est une hyperbole équilatère passant par les trois points donnés et ayant pour centre le milieu C de ab, cela résulte immédiatement des propriétés des faisceaux homographiques. Prenant ensuite sur une hyperbole équilatère donnée un point O et deux points a, b diamétralement opposés, en vertu d'un théorème connu, les bissectrices de l'angle aOb sont parallèles aux asymptotes; si donc m est un point quelconque de la courbe, l'angle $\widehat{maO}$ = l'angle $\widehat{mbO}$.

Revenons à la strophoïde; on obtient une infinité de couples de points A et B tels que MO soit bissectrice de AMB, et la seule condition est que les droites OA et OB soient également inclinées sur les tangentes au point double.

Appelons points associés deux points tels que A et B; ces points jouissent de propriétés fort remarquables.

La projection du point double O sur la droite AB appartient à la strophoïde, donc l'enveloppe de AB, podaire négative de la strophoïde, est une parabole.

Les tangentes en A et B à la strophoïde sont respectivement symétriques de AB par rapport à AO et BO; on le voit sans peine en supposant qu'un point M de la courbe se rapproche indéfiniment du point A. Par suite, le point de rencontre des tangentes en A et B est sur la strophoïde. Réciproquement, si d'un point M d'une strophoïde, je mène deux tangentes à la courbe, les points de contact sont des points associés, et la droite MO est bissectrice des deux tangentes.

Si A, B et A′, B′ sont deux couples de points associés, le point A″, intersection de AB′ et BA′, et le point B″, intersection de AA′ et BB′, sont sur la strophoïde et sont associés. De plus les quatre droites AB′, BA′, AA et BB′ sont tangentes à un cercle de centre O. Toutes ces propriétés se déduisent par des considérations fort élémentaires de la définition des points associés.

A. Durand, soldat au 117e de ligne, à Paris.

---

72. — *On considère les coniques en nombre infini qui passent par deux points* A *et* B *et qui sont telles que pour chacune d'elles la droite* AB *soit l'un des deux diamètres conjugués égaux. On demande de déterminer :*

1° Le lieu des foyers;

2° Le lieu des sommets de ces coniques.

(École des mines de Saint-Étienne, 1890.)

Prenons pour axe des x la droite AB et pour axe des y une perpendiculaire à AB en son milieu. Si AB $= 2a$, l'équation générale des coniques ayant AB pour diamètre est

$$x^2 + 2\lambda xy + \mu y^2 - a^2 = 0.$$

Pour que AB soit l'un des diamètres conjugués égaux, il faut que le diamètre conjugué de AB

ait pour longueur $2a$. Ce diamètre a pour équation

$$x + \lambda y = 0;$$

sa demi-longueur est $a\sqrt{\dfrac{1+\lambda^2}{\mu-\lambda^2}}$; on doit donc avoir

$$\frac{1+\lambda^2}{\mu-\lambda^2} = 1 \qquad \text{ou} \qquad \mu = 2\lambda^2 + 1.$$

L'équation générale des coniques considérées est donc

$$x^2 + 2\lambda xy + (2\lambda^2 + 1)y^2 - a^2 = 0.$$

1° Les foyers sont à l'intersection des deux hyperboles définies par les équations

$$(x+\lambda y)^2 - [\lambda x + (2\lambda^2+1)y]^2 + 2\lambda^2\,[x^2 + 2\lambda xy + (2\lambda^2+1)y^2 - a^2] = 0,$$
$$(x+\lambda y)\,[\lambda x + (2\lambda^2+1)y] - \lambda[x^2 + 2\lambda xy + (2\lambda^2+1)y^2 - a^2] = 0,$$

qui peuvent s'écrire

$$(\lambda^2+1)(x^2-y^2) - 2a^2\lambda^2 = 0,$$
$$(\lambda^2+1)\,xy + a^2\lambda = 0.$$

Éliminant λ entre ces deux équations on aura le lieu des foyers.

En éliminant d'abord $1+\lambda^2$, on obtient $\lambda = \dfrac{y^2-x^2}{2xy}$, et remplaçant dans une des deux équations, il vient

$$(x^2+y^2)^2 + 2a^2(y^2-x^2).$$

C'est l'équation d'une lemniscate de foyers A et B.

2° On aura le lieu des sommets en éliminant λ entre l'équation de la courbe

$$x^2 + 2\lambda xy + (2\lambda^2+1)y^2 - a^2 = 0$$

et celle des axes

$$y^2 - 2\lambda xy - x^2 = 0.$$

On obtient sans difficulté

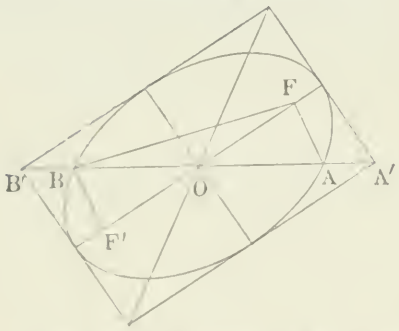
$$(x^2+y^2)^2 - 2a^2x^2 = 0,$$
$$(x^2+y^2-ax\sqrt{2})(x^2+y^2+ax\sqrt{2}) = 0.$$

Le lieu se compose de deux cercles tangents à l'origine à Oy et tangents à la lemniscate précédente en ses sommets.

E. Jacquest, lycée de Dijon.

(Ont résolu la même question : MM. Audouin, élève de marine, lycée de Cherbourg; A. Bergé, lycée de Toulouse; Descombes, à Annecy F. Faure, à Valence.)

Solution géométrique. — **1°** Imaginons une ellipse de demi-axes a et b, et ayant AB pour l'un des diamètres conjugués égaux. Soient F et F′ les deux foyers; on a FA = F′B, et par suite



$$\mathrm{FA} + \mathrm{FB} = 2a;$$

élevant au carré : $\overline{\mathrm{FA}}^2 + \overline{\mathrm{FB}}^2 + 2\mathrm{FA}\times\mathrm{FB} = 4a^2.$

Mais dans le triangle AFB

$$\overline{\mathrm{FA}}^2 + \overline{\mathrm{FB}}^2 = 2\overline{\mathrm{OF}}^2 + 2\overline{\mathrm{OA}}^2;$$

donc

$$2\mathrm{FA}\times\mathrm{FB} = 4a^2 - 2\overline{\mathrm{OF}}^2 - 2\overline{\mathrm{OA}}^2$$

ou

$$\mathrm{FA}\times\mathrm{FB} = a^2 + b^2 - \overline{\mathrm{OA}}^2 = \overline{\mathrm{OA}}^2.$$

Le lieu du point F est donc une lemniscate ayant A et B pour foyers.

2° Les tangentes aux sommets de l'ellipse rencontrent AB en deux points A′ et B′ symétriques par rapport à O, et tels que $\mathrm{OA}' = \mathrm{OA}\sqrt{2}$. Ces deux points sont fixes, et l'on voit que le lieu des sommets se compose des deux cercles décrits sur OA′ et OB′ comme diamètres.

Capitaine E. N. Barisien.

CONCOURS DE 1891 *(Suite).*

ÉCOLE DES PONTS ET CHAUSSÉES

Cours préparatoires.

Algèbre.

118. — Résoudre l'équation du troisième degré

$$x^3 + px + q = 0,$$

sachant que l'une des racines est la somme des inverses des deux autres; trouver la condition qui doit exister entre les coefficients p et q pour qu'il en soit ainsi. Application à l'équation

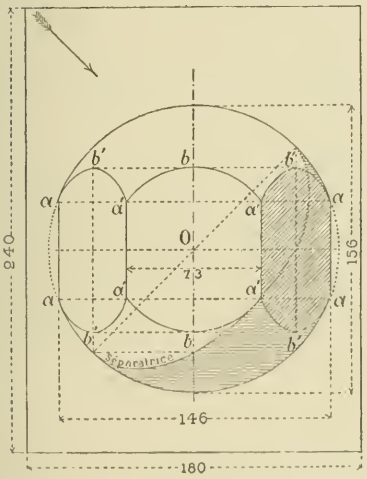
$$x^3 - 5x + 2 = 0.$$

(25 septembre, de 8 h. à midi.)

Géométrie analytique.

119.—Lieu des pieds des perpendiculaires abaissées du foyer d'une parabole sur les normales à cette courbe.

(25 septembre, de 1 h. à 5 h.)



Lavis (feuille 1/8 grand-aigle).

PRISME et SPHÈRE (Surfaces dépolies).

Intersection des surfaces. — La face du prisme qui est de front coupe la sphère suivant des arcs de cercle $a'ba'$, de centre O; les points a' et a' sont au niveau des points a et a situés sur le contour apparent.

Les faces latérales du prisme déterminent des arcs de cercle égaux aux précédents, mais projetés suivant des arcs d'ellipse $ab'a'$, $a'b'a$... Le point b' est à plomb du milieu de aa' et au niveau de b. En a, l'ellipse est tangente au contour apparent de la sphère.

Ces conditions suffisent pour tracer facilement ces arcs d'ellipse.

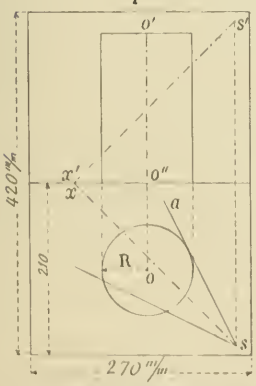
Exécuter le lavis à l'encre de Chine (sans couleurs), à teintes plates ou à teintes fondues, à volonté.

(26 septembre, de 8 h. à midi.)

Épure (feuille 1/4 grand-aigle).

INTERSECTIONS : CÔNE et CYLINDRE DE RÉVOLUTION.

Le croquis ci-contre fait connaître *au tiers* de la grandeur de l'épure à exécuter, les données du problème.



(a) Le *cylindre* a son axe vertical : o est le pied de cet axe; $o'o''$ en est la projection verticale; le rayon de base est R.

(b) Le *cône* a pour sommet le point ss' et son axe est la droite sx, $s'x'$; on remarquera que cet axe ne rencontre pas celui du cylindre.

En projection horizontale, une des deux génératrices de contour apparent, sa, du cône est tangente au cylindre; cette condition suffit donc à déterminer le cône qui, d'ailleurs, est de révolution.

On demande :

de déterminer l'entaille faite par le cône dans le cylindre, c'est-à-dire :

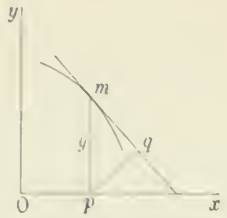
1° de chercher l'intersection des deux surfaces;

2° de représenter ensuite le cylindre seul, en supposant le cône enlevé.

Nota. — Pour trouver des génératrices du cône, on pourra déterminer une sphère inscrite dans ce cône et par le sommet ss' mener des droites tangentes à cette sphère. C'est une méthode; mais on peut en employer d'autres.

(26 septembre, de 1 h. à 5 h.)

Places d'élèves externes.



Analyse et Trigonométrie.

I. — Trouver l'équation d'une courbe telle que la projection de l'ordonnée sur la tangente ait une longueur constante :

$$mq = \text{constante}.$$

II. — Résoudre un triangle connaissant :

la base $a = 8257^{m}$, l'angle opposé $A = 39^{\circ}\,25'\,7''$, et la surface $S = 18359625^{mq}$.

(25 septembre, de 8 h. à midi.)

Mécanique.

Deux points matériels de masses m et m', assujettis à se mouvoir sur une cycloïde placée dans un plan vertical, sont reliés entre eux par un fil inextensible de longueur l qui par l'effet des deux poids reste constamment tendu sur la courbe. On demande le mouvement que prendra le système sous l'action de la pesanteur à partir d'une position initiale définie par la longueur correspondante S_0 de l'arc om.

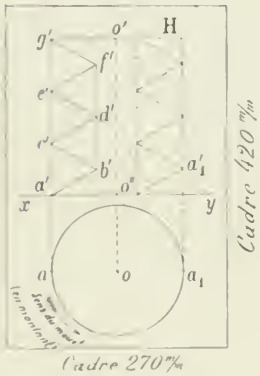
On supposera les vitesses initiales nulles et le poids du fil négligeable. On ne tiendra pas compte du frottement du fil sur la courbe, ni de sa raideur.

(25 septembre, de 1 h. à 5 h.)

Épure de géométrie descriptive (feuille 1/4 grand-aigle).

VIS A FILETS TRIANGULAIRES

Une vis à filets triangulaires est engendrée par un triangle équilatéral $b'c'd'$ se déplaçant d'un mouvement hélicoïdal *dextrorsum*, autour d'un axe vertical $oo''o'$.



On demande :

1° De représenter trois filets consécutifs de la vis ;

2° De limiter la surface, d'une part au plan horizontal de projection, d'autre part à un plan horizontal H passant à la hauteur du troisième filet g'. On déterminera donc la section du solide par ce plan H, et l'on indiquera exactement ses contours apparents sur le plan vertical.

3° D'ombrer le solide, en le supposant éclairé par des rayons à 45°, suivant l'usage.

(26 septembre, de 8 h. à midi.)

Croquis.

Première partie : CROQUIS (feuille 1/8 grand-aigle).

1° Faire au crayon, à main levée, le relevé géométral (plan, élévation et coupe) de l'un des objets placés dans la salle d'examen (*).

2° Relever les dimensions (en millimètres) et les inscrire sur le croquis.

(On accorde 1 heure 1/2 pour cette première partie du travail, après quoi le modèle en relief est retiré de la salle).

Deuxième partie : MISE AU NET (feuille 1/4 grand-aigle).

Mettre au net, à l'encre de Chine, à une échelle déterminée, le croquis précédent.

L'échelle est laissée à l'arbitraire de MM. les candidats. On fera le trait seul, sans lavis.

(26 septembre, de 1 h. à 5 h.

(*) Ces objets étaient :

1° Détail (au tiers) de l'assemblage de la membrure supérieure en fonte d'un pont américain (pont sur l'Ohio) avec les écharpes en fers plats et les bracons en fers tubulaires. — 2° Détail (au tiers) d'un chariot de dilatation (viaduc de la Houlbec). — 3° Détail (au tiers) de l'assemblage de la membrure inférieure d'une grande poutre en tôle avec les pièces montantes, verticales et inclinées, ainsi qu'avec les entretoises. (Pont sur la Mur). — Un même modèle servait pour trois ou quatre candidats.

Le Rédacteur-Gérant : H. VUIBERT.

PARIS — IMP. CHAIX. — 20962-9-91.

1re Année. N° 2. Novembre 1891.

REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

ALGÈBRE

75. — *Étant données les deux équations*

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0,$$
$$a'x^2 + b'x + c' = 0,$$

quelle relation doit exister entre les coefficients pour que les deux équations ne puissent avoir une racine commune sans en avoir deux?

Posons $$f(x) \equiv ax^3 + bx^2 + cx + d,$$

et soient α, β les deux racines de l'équation $a'x^2 + b'x + c' = 0$, que nous supposerons distinctes. Il s'agit de trouver une condition exprimant que si $f(\alpha) = 0$, on a aussi $f(\beta) = 0$ ou que, réciproquement, l'équation $f(\beta) = 0$ entraîne $f(\alpha) = 0$. Il suffit évidemment d'exprimer que $f(\alpha) - f(\beta) = 0$, car d'une part s'il y a deux racines communes on a $f(\alpha) - f(\beta) = 0$, ce qui prouve que la condition est nécessaire, et d'autre part quand la condition $f(\alpha) - f(\beta) = 0$ est remplie, l'égalité $f(\alpha) = 0$ entraîne $f(\beta) = 0$, et inversement. Plus exactement, pour écarter l'hypothèse $\alpha = \beta$, nous écrirons que la fonction symétrique entière

$$\frac{f(\alpha) - f(\beta)}{\alpha - \beta}$$

est nulle ; ce qui donne $$a(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2) + b(\alpha + \beta) + c = 0$$

ou bien $$a(\alpha + \beta)^2 + b(\alpha + \beta) - a\alpha\beta + c = 0,$$

c'est à dire $$a\frac{b'^2}{a'^2} - \frac{bb'}{a'} - \frac{ac'}{a'} + c = 0$$

ou $$ab'^2 - a'bb' - aa'c' + ca'^2 = 0$$

ou encore $$a'(ac' - ca') - b'(ab' - ba') = 0.$$

Seconde solution. — Divisons $ax^3 + bx^2 + cx + d$ par $a'x^2 + b'x + c'$. On trouve

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = (a'x^2 + b'x + c')\left[\frac{a}{a'}x + \frac{1}{a'^2}(ba' - ab')\right] + \frac{x}{a'^2}[a'(ca' - ac') - b'(ba' - ab)] + d - \frac{c'}{a'^2}(ba' - ab').$$

On voit donc que si les équations proposées ont une solution commune α, cette solution devra vérifier l'équation du premier degré

$$\frac{x}{a'^2}[a'(ca' - ac') - b'(ba' - ab')] + d - \frac{c'}{a'^2}(ba' - ab') = 0.$$

Donc il ne peut y avoir qu'une seule solution commune, à moins que le coefficient de x ne soit nul, car dans ce cas les équations ne peuvent avoir de racine commune qu'autant que la condition

$$a'^2d - c'(ba' - ab') = 0$$

sera vérifiée, et alors $ax^3 + bx^2 + cx + d$ sera divisible par $a'x^2 + b'x + c'$.

B. N.

Troisième solution. — En posant

$$P = a'(ca' - ac') - b'(ba' - ab'),$$
$$Q = a'^2 d - c'(ba' - ab'),$$
$$R = (ca' - ac')c' - a'b'd,$$

on trouve facilement que les conditions pour que les équations proposées aient deux racines communes sont

$$P = 0, \qquad Q = 0.$$

Or la condition pour qu'elles aient au moins une racine commune est

$$Q^2 + PR = 0.$$

Il s'agit donc d'exprimer que si $Q^2 + PR$ est nul, on a nécessairement $P = 0$ et $Q = 0$; la condition cherchée est donc évidemment $P = 0$.

L. Perrée (lycée Condorcet).

M. Faure (Valence) a également envoyé une solution.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

73. — *Discuter l'équation* $y = \dfrac{x^2 + x + 1}{x - 2}$. *Rapporter cette courbe à ses axes, sachant que les axes primitifs des coordonnées sont rectangulaires.*

L'équation peut s'écrire
$$y = x + 3 + \frac{7}{x - 2},$$
et sous cette forme on reconnaît l'équation d'une hyperbole qui a pour asymptotes les droites $y = x + 3$ et $x - 2 = 0$. On la construit en ajoutant aux ordonnées de la droite

$$y = x + 3 \text{ la quantité } \frac{7}{x - 2}.$$

Son équation réduite peut s'obtenir d'après la méthode générale, en calculant les racines de l'équation en S et le terme tout connu. Il est préférable de remarquer ici que les axes, bissectrices des asymptotes, ont pour équations

$$\frac{y - x - 3}{\sqrt{2}} = \pm (x - 2),$$

ou en posant
$$A = y - x - 3, \qquad B = x - 2,$$
$$A \pm B\sqrt{2} = 0.$$

Soient X, Y les distances d'un point à ces axes ; on aura, au signe près,

$$A + B\sqrt{2} = X\sqrt{4 - 2\sqrt{2}},$$
$$A - B\sqrt{2} = Y\sqrt{4 + 2\sqrt{2}};$$

d'où
$$4AB\sqrt{2} = X^2(4 - 2\sqrt{2}) - Y^2(4 + 2\sqrt{2}),$$

et comme l'équation de l'hyperbole est $AB = 7$, X et Y satisfont à l'équation

$$X^2(2-\sqrt{2}) - Y^2(2+\sqrt{2}) = 14\sqrt{2}$$

ou

$$X^2(\sqrt{2}-1) - Y^2(\sqrt{2}+1) = 14.$$

C'est l'équation réduite.

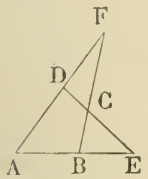
Abel Dumas, lycée de Lyon.

M. E. Jossinet a envoyé une solution analogue.

---

76. — *Étant données les équations de quatre droites situées dans un même plan, trouver les coordonnées de ceux des six points d'intersection qui sont les sommets d'un quadrilatère convexe.*

Soit ABCDEF le quadrilatère complet formé par les quatre droites données, et supposons que ABCD soit un quadrilatère convexe. Par chaque sommet du quadrilatère complet passent deux des droites, contenant chacune trois des points d'intersection. On peut partager les six sommets en trois espèces : 1° Le point C est intérieur aux deux segments BF et DE. 2° Le point B est intérieur au segment AE, extérieur au segment CF; le point D jouit de propriétés analogues. Enfin 3° le point A est extérieur à chacun des segments BE et DF; les points E et F sont pareillement extérieurs aux segments qui leur correspondent.



Or, étant données les équations $D_1 = 0$, $D_2 = 0$, $D_3 = 0$, $D_4 = 0$; nous pouvons par exemple déterminer l'abscisse du point de rencontre des droites D_1, D_2; point que nous représenterons par (1, 2). Calculons de même les abscisses des points (1, 3) et (1, 4). La comparaison de ces trois abscisses nous indiquera si le premier point est intérieur ou extérieur au segment formé par les deux autres. Nous ferons la même recherche pour le point (1, 2), et le segment déterminé par les points (2, 3), (2, 4). Nous saurons ainsi à quelle espèce appartient le point (1, 2). Quand nous aurons déterminé les deux premières espèces, nous aurons trois des sommets cherchés : B, C, D, d'où l'on déduira les points F et E, et par suite le point A sera aussi connu.

---

77. — *On donne une conique* (C) *et un cercle qui a son centre en l'un des foyers de la conique. Par les points* A *et* B *où une tangente mobile au cercle rencontre la conique* (C), *on mène les deux autres tangentes au cercle. Trouver le lieu de leur point de rencontre.*

Je prends pour axes des parallèles aux axes de la conique passant par le centre du cercle.

Soient

$$x^2 + y^2 - R^2 = 0,$$

$$x^2 + y^2 - e^2(x-a)^2 = 0$$

les équations du cercle et de la conique.

L'équation d'une tangente au cercle peut s'écrire

$$\lambda^2(x+R) + 2\lambda y - (x-R) = 0; \qquad (1)$$

cette tangente rencontre la conique en A et B, et de chacun de ces deux points on peut mener au cercle une seconde tangente dont l'équation sera

$$\mu^2(x+R) + 2\mu y - (x-R) = 0, \qquad (2)$$

les deux valeurs de μ étant déterminées en écrivant que le point de rencontre des droites (1) et (2) se trouve sur la conique. En résolvant ces deux équations, on obtient

$$\frac{x}{\lambda\mu - 1} = \frac{y}{\lambda + \mu} = \frac{-R}{\lambda\mu + 1};$$

remplaçant dans l'équation de la conique, on a

$$\mu^2[R^2(\lambda^2+1)-e^2\lambda^2(R+a)^2]+2\lambda\mu e^2(R^2-a^2)+R^2(\lambda^2+1)-e^2(R-a)^2=0. \qquad (3)$$

Si, dans l'équation (2), x et y désignent les coordonnées d'un point du lieu, les équations (2) et (3) doivent avoir mêmes racines en μ, ce qui donne

$$\frac{x+R}{R^2(\lambda^2+1)-e^2\lambda^2(R+a)^2}=\frac{y}{\lambda e^2(R^2-a^2)}=\frac{-(x-R)}{R^2(\lambda^2+1)-e^2(R-a)^2},$$

d'où l'on tire

$$x=\frac{Re^2[(R-a)^2-\lambda^2(R+a)^2]}{\lambda^2[2R^2-e^2(R+a)^2]+2R^2-e^2(R-a)^2},$$

$$y=\frac{2Re^2\lambda(R^2-a^2)}{\lambda^2[2R^2-e^2(R+a)^2]+2R^2-e^2(R-a)^2}.$$

On a ainsi les coordonnées d'un point du lieu, exprimées en fonction rationnelle du paramètre λ; le lieu est donc une conique. Nous en aurons l'équation en éliminant λ entre ces deux dernières équations.

Posons $\quad A=(R-a)^2, \qquad B=(R+a)^2,$

$$C=2R^2-e^2(R+a)^2, \qquad D=2R^2-e^2(R-a)^2;$$

On a

$$x=\frac{Re^2(A-B\lambda^2)}{C\lambda^2+D}, \qquad (4)$$

$$y=\frac{2Re^2\lambda\sqrt{AB}}{C\lambda^2+D};$$

d'où

$$x^2+y^2=\frac{R^2e^4(A+B\lambda^2)^2}{(C\lambda^2+D)^2}. \qquad (5)$$

De (4) on tire

$$\lambda^2=\frac{ARe^2-Dx}{Cx+BRe^2},$$

et remplaçant dans (5) il vient

$$x^2+y^2=\frac{[(AC-BD)x+2ABRe^2]^2}{(AC+BD)^2}$$

ou enfin

$$x^2+y^2=\frac{2R^2[4aR^2x-e^2(R^2-a^2)^2]^2}{[2R^2(R^2+a^2)-e^2(R^2-a^2)^2]^2}.$$

Le lieu est donc une conique qui a pour foyer le point O, et même axe focal que la conique donnée.

L. Perrée, lycée Condorcet.

M. E. Joyant, lycée Condorcet, a donné une solution analogue.

Remarque. — M. le capitaine Barisien et M. Vigneaux, élève au lycée de Toulouse, ont observé que si l'on remplace la conique (C) et le cercle par deux coniques quelconques, le lieu demandé est une conique faisant partie du faisceau tangentiel des coniques données.

Prenons pour triangle de référence le triangle conjugué commun aux deux coniques; leurs équations pourront s'écrire

$$x^2+y^2-z^2=0,$$

$$ax^2+ly^2-cz^2=0.$$

Il suffit de répéter le même calcul que plus haut.

Les équations de deux tangentes à la première conique s'écrivent

$$\lambda^2(x+z)+2\lambda y-(x-z)=0, \qquad (1)$$

$$\mu^2(x+z)+2\mu y-(x-z)=0; \qquad (2)$$

leur point de rencontre a pour coordonnées

$$\frac{x}{\lambda\mu - 1} = \frac{y}{\lambda + \mu} = \frac{-z}{\lambda\mu + 1},$$

et en écrivant que ce point est sur la deuxième conique

$$a(\lambda\mu - 1)^2 + b(\lambda + \mu)^2 - c(\lambda\mu + 1)^2 = 0$$

ou

$$\mu^2[(a - c)\lambda^2 + b] - 2\lambda\mu(a - b + c) + b\lambda^2 + a - c = 0. \qquad (3)$$

Pour tout point du lieu, les équations (2) et (3) ont mêmes racines; donc

$$\frac{x + z}{(a - c)\lambda^2 + b} = \frac{-y}{(a - b + c)\lambda} = \frac{-(x - z)}{b\lambda^2 + a - c},$$

d'où l'on tire

$$\frac{2x}{(b + c - a)(1 - \lambda^2)} = \frac{-y}{(c + a - b)\lambda} = \frac{2z}{(a + b - c)(\lambda^2 + 1)}.$$

En éliminant λ entre ces deux équations, on obtient l'équation du lieu

$$\frac{x^2}{(b + c - a)^2} + \frac{y^2}{(c + a - b)^2} - \frac{z^2}{(a + b - c)^2} = 0.$$

L'équation tangentielle de cette conique peut s'écrire

$$u^2(b + c - a)^2 + v^2(c + a - b)^2 - w^2(a + b - c)^2 = 0$$

ou

$$(u^2 + v^2 - w^2)(a^2 + b^2 + c^2 - 2bc - 2ca - 2ab) + 4abc\left[\frac{u^2}{a} + \frac{v^2}{b} - \frac{w^2}{c}\right] = 0.$$

Ce qui montre que le lieu trouvé est une conique appartenant au faisceau tangentiel des deux coniques données.

Ce théorème peut s'énoncer de la façon suivante :

Le lieu du troisième sommet d'un triangle circonscrit à une conique et dont deux sommets décrivent une autre conique est une conique inscrite dans le quadrilatère des quatre tangentes communes aux coniques données.

En transformant par dualité, on obtient cet autre énoncé :

L'enveloppe du troisième côté d'un triangle inscrit dans une conique et dont deux côtés touchent une autre conique est une conique passant par les points communs aux deux coniques données.

---

78. — *On abaisse d'un point* P *pris dans le plan d'une ellipse, les quatre normales à cette ellipse, et l'on considère le quadrilatère formé par les tangentes à l'ellipse menées aux pieds des normales. Le lieu des points* P *tels que ce quadrilatère soit inscriptible à un cercle, se compose : 1° des axes de l'ellipse; 2° de la polaire par rapport au centre d'une hyperbole ayant même centre et mêmes directions d'axes que l'ellipse.*

L'équation aux coefficients angulaires des normales issues du point (α, β) est

$$b^2\alpha^2 . m^4 - 2\alpha\beta b^2 m^3 + (a^2\alpha^2 + b^2\beta^2 - c^4)\, m^2 - 2a^2\alpha\beta m + a^2\beta^2 = 0. \qquad (1)$$

En choisissant convenablement une direction sur chacune des quatre normales et en désignant par $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$ les angles que ces directions font avec l'axe Ox, la condition à exprimer revient à celle-ci :

$$\omega_1 - \omega_3 = \omega_4 - \omega_2$$

ou

$$\omega_1 + \omega_2 = \omega_3 + \omega_4,$$

et par suite, les racines de l'équation (1) vérifient la relation

$$\frac{m_1 + m_2}{1 - m_1 m_2} = \frac{m_3 + m_4}{1 - m_3 m_4}. \qquad (2)$$

Posons $m_1 + m_2 = \lambda, \quad m_3 + m_4 = \mu, \quad m_1 m_2 = u, \quad m_3 m_4 = v.$

On a, en vertu de l'équation (1),

$$\lambda + \mu = \frac{2\beta}{\alpha} = 2A, \tag{3}$$

$$\lambda\mu + u + v = \frac{a^2\alpha^2 + b^2\beta^2 - c^4}{b^2\alpha^2} = B, \tag{4}$$

$$\lambda v + \mu u = \frac{2a^2\beta}{b^2\alpha} = 2C, \tag{5}$$

$$uv = \frac{a^2\beta^2}{b^2\alpha^2} = D. \tag{6}$$

La relation (2) peut s'écrire $\lambda(1 - v) - \mu(1 - u) = 0.$ (7)

On aura l'équation du lieu en éliminant λ, μ, u, v entre ces cinq équations.

Les équations (3) et (7) donnent

$$\frac{\lambda}{1 - u} = \frac{\mu}{1 - v} = \frac{2A}{2 - (u + v)};$$

en portant les valeurs de λ et de μ tirées de ces équations dans les équations (4) et (5) on obtient, en tenant compte de l'équation (6) :

$$4A^2[1 + D - (u + v)] = [B - (u + v)][2 - (u + v)]^2$$

$$A(u + v - 2D) = C[2 - (u + v)].$$

Éliminons $u + v$ entre ces deux équations, nous aurons

$$A^2(C - A)(C + A)^2(D - 1) = [B(A + C) - 2(AD + C)]A^2(D - 1)^2.$$

Cette équation nous donne : 1° $A = 0$, c'est-à-dire $\beta = 0$; donc l'axe des x fait partie du lieu; 2° $D = 1$, c'est-à-dire $a^2\beta^2 - b^2\alpha^2 = 0$. Mais si cette condition est remplie, le produit des racines de l'équation (1) est égal à l'unité; il ne s'ensuit pas que ces racines vérifient la condition (2); donc il faut écarter cette solution.

Enfin, après avoir supprimé $A^2(D - 1)$, il reste l'équation

$$(C - A)(C + A)^2 = [B(A + C) - 2(AD + C)](D - 1)$$

ou, en remplaçant A, B, C, D par leurs valeurs ainsi que α par x et β par y, on obtient

$$x^2y^2(a^2 + b^2)^2 - (a^2y^2 - b^2x^2)[a^2x^2 - b^2y^2 - c^2(a^2 + b^2)] = 0$$

ou

$$a^2b^2(x^2 + y^2)^2 - c^2(a^2 + b^2)(b^2x^2 - a^2y^2) = 0,$$

podaire, par rapport à son centre, de l'hyperbole définie par l'équation

$$a^2x^2 - b^2y^2 = c^2(a^2 + b^2).$$

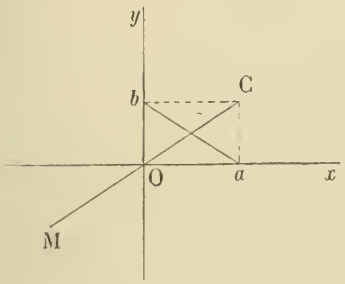
Mais il convient de remarquer que l'axe des y fait aussi partie du lieu ; on a supposé en effet $\alpha \neq 0$ dans le calcul précédent. Or si $\alpha = 0$, l'équation (1) a deux racines infinies, les deux autres étant égales et de signes contraires et la relation (2) est alors vérifiée. On vérifie de la même manière, directement, que l'axe des x fait partie du lieu. En résumé, le lieu se compose des axes de l'ellipse et d'une podaire d'hyperbole.

H. Jacquest, lycée de Dijon.

Autres solutions : MM. Madaule (Louis-le-Grand) ; Joyant et Perrée (lycée Condorcet).

83. — *On considère une série d'ellipses concentriques et ayant les mêmes directions d'axes, ainsi qu'une droite fixe. En chacun des points d'intersection de cette droite avec l'une quelconque des ellipses on mène les normales à l'ellipse, qui se rencontrent en un certain point* P. *De ce point* P *on abaisse les deux autres normales à l'ellipse. La droite qui joint les pieds de ces dernières normales a pour pôle un point qui reste fixe quelle que soit l'ellipse de la série.*

Soient x_0, y_0 les coordonnées du pôle de la droite joignant les pieds des deux dernières normales, les axes coordonnés étant dirigés suivant les axes de symétrie des coniques considérées. D'après un théorème bien connu, dû à Joachimsthal, la droite qui joint les pieds des deux premières normales a pour équation



$$\frac{x}{x_0} + \frac{y}{y_0} + 1 = 0.$$

Or cette droite est fixe par hypothèse; soit

$$\frac{x}{u} + \frac{y}{v} - 1 = 0$$

son équation. En identifiant ces deux équations, on a donc

$$x_0 = -u, \qquad y_0 = -v,$$

ce qui démontre que le point (x_0, y_0) est fixe.

D'ailleurs en nommant M ce point, on sait que pour avoir la droite qui joint les pieds des deux premières normales, on doit prendre le point C symétrique de M par rapport aux axes et abaisser du point C des perpendiculaires ca, cb aux axes; la droite demandée est la droite ab. Réciproquement, connaissant ab, le point M s'en déduit immédiatement, puisqu'il est le symétrique du point C.

Ont envoyé des solutions exactes : MM. Georges Alizi (Bordeaux); Audibert (Marseille); Auzeram (Toulouse); Avrillier-B... (Paris); Bourrienne (lycée de Rouen); H. Cheronnet (école Monge); Aug. Delpierre; Descombes; Faucillon (collège Chaptal); Faure (Valence); Hugron (lycée Saint-Louis); Ed. Husson (Nancy); Jacquest (Dijon); Jossinet (Troyes); Joyant (lycée Condorcet); Peltier (Clermont); Perrée (lycée Condorcet); Pouilliart (Clermont); Randon (lycée Louis-le-Grand); P.-F. Teilhet (Saint-Etienne); J. Vigneaux (lycée de Toulouse); X... (Nancy).

Solution géométrique. — Soient A et B les points de rencontre de la droite donnée avec l'une des ellipses; a, a' les points de rencontre de cette droite avec les axes Ox, Oy; soient C, D les pieds des normales à l'ellipse menées par le point de rencontre P des normales en A et B, et b, b' les points d'intersection de CD avec Ox et Oy; enfin soient α, β les extrémités de l'axe de l'ellipse dirigé suivant Ox, et M le pôle de CD. L'ellipse considérée, l'hyperbole d'Apollonius passant par A, B, C, D et les droites AB, CD coupent l'axe Ox en six points : α, β; O et le point à l'infini sur $x'x$; a et b qui forment une involution dont O est le point central. Par suite

$$Oa.Ob = O\alpha.O\beta.$$

D'autre part, si m est la projection de M sur Ox, Mm est la polaire de b; donc

$$Om.Ob = \overline{O\alpha}^2;$$

par conséquent

$$Om = -Oa.$$

De même, si m' est la projection de M sur Oy, on a

$$Om' = -Oa'.$$

Le pôle M de CD est donc fixe; c'est le symétrique par rapport à O du point ayant pour coordonnées Oa, Oa'.

Généralisation. — L'une quelconque des coniques considérées est conjuguée au triangle formé par les axes Ox, Oy et la droite de l'infini; l'hyperbole d'Apollonius correspondante est circonscrite à ce triangle; de plus la droite donnée est une corde commune à ces deux coniques. Donc en transformant homographiquement on peut énoncer ce théorème :

Si l'on considère tous les couples de deux coniques telles que l'une soit conjuguée et l'autre circonscrite à un triangle fixe et qu'elles admettent pour corde commune une droite fixe, la seconde corde commune a pour pôle par rapport à la première conique un point fixe.

C'est d'ailleurs ce que l'on peut établir analytiquement. Prenons le triangle fixe pour triangle de référence : les coniques et la droite auront pour équations

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 0,$$

$$ayz + bzx + cxy = 0,$$

$$\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} + \frac{z}{\gamma} = 0,$$

et l'on pourra disposer de a, b, c et λ de sorte que

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + \lambda(ayz + bzx + cxy) \equiv \left(\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} + \frac{z}{\gamma}\right)(A\alpha x + B\beta y + C\gamma z).$$

Le pôle de la seconde corde commune par rapport à la première conique sera défini par les équations

$$\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma},$$

ce qui démontre le théorème.

E. Duporcq (école Monge).

Solution analogue par M. A. de Boisfleury (collège Stanislas).
Autre solution géométrique par M. le Dr Gutsche.

---

89. — *Un cercle de rayon* R *est tangent à une ellipse donnée, à l'extrémité du grand axe. Trouver une équation qui donne la distance d'un des foyers au point où la tangente commune aux deux courbes rencontre le grand axe.*

Soit $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ l'équation de l'ellipse rapportée à ses axes, et

$$(x - a - R)^2 + y^2 = R^2$$

l'équation d'un cercle tangent au sommet d'abscisse a.

Soit α l'abscisse du point M, où une tangente commune aux deux courbes rencontre Ox. Nous écrirons que les tangentes issues du point M à ces deux courbes sont confondues.

Les directions de ces tangentes sont données, pour l'ellipse, par l'équation

$$x^2 - y^2 \frac{\alpha^2 - a^2}{b^2} = 0,$$

et pour le cercle, par

$$x^2 - y^2 \frac{(\alpha - a)(\alpha - a - 2R)}{R^2} = 0.$$

On doit donc avoir

$$\frac{(\alpha - a)(\alpha - a - 2R)}{R^2} = \frac{\alpha^2 - a^2}{b^2};$$

en supprimant la solution $\alpha = a$, qui correspond à la tangente intérieure, il vient

$$\alpha = \frac{aR^2 + 2b^2R + ab^2}{b^2 - R^2};$$

les segments $\overline{FM}$ et $\overline{F'M}$ ont alors pour expressions

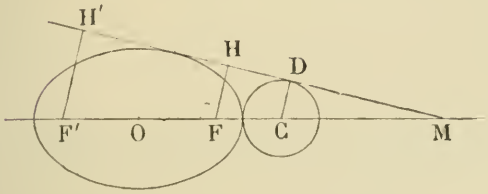
$$\frac{aR^2 + 2b^2R + ab^2}{b^2 - R^2} \pm c.$$

Remarque. — La valeur de α est réelle, quel que soit R. Si, par exemple, R est négatif, il peut arriver que les tangentes communes soient imaginaires, leur point de concours n'en est pas moins réel. En particulier, si $R = c - a$, le centre du cercle coïncide avec le foyer F, les deux tangentes communes ont pour coefficients angulaires $\pm i$, et la formule précédente donne $\alpha = 0$, ce qui était aisé à prévoir.

Descombes, à Annecy.

Solutions semblables de MM. Auzeram, lycée de Toulouse; Bourrienne, lycée de Rouen; G. Cuny, école Saint-Sigisbert, à Nancy; F. Faure, Valence; A. Haarbleicher, lycée Condorcet; L. Perrée, lycée Condorcet.

Autre solution. — On peut obtenir le même résultat par des considérations élémentaires.



On a aisément les égalités

$$\frac{FH}{CD} = \frac{MF}{MC} \quad \text{et} \quad \frac{F'H'}{CD} = \frac{MF'}{MC},$$

ou, en posant $OM = \alpha$,

$$\frac{FH}{R} = \frac{\alpha - c}{\alpha - a - R} \quad \text{et} \quad \frac{F'H'}{R} = \frac{\alpha + c}{\alpha - a - R}.$$

Multiplions membre à membre et observons que $FH \times F'H' = b^2$; il vient

$$\frac{b^2}{R^2} = \frac{\alpha^2 - c^2}{(\alpha - a - R)^2};$$

supprimant la racine $\alpha = a$, il reste

$$\alpha = \frac{aR^2 + 2b^2R + ab^2}{b^2 - R^2}.$$

Louis Philippe, élémentaires, Saint-Louis.

---

90. — *On donne deux points fixes* A *et* B. *De* A *et* B *comme centres, on décrit deux cercles, l'un de rayon constant, l'autre de rayon variable. Le lieu des points de contact des tangentes communes avec le cercle variable est un limaçon de Pascal.*

Prenons pour axe des x la droite AB, pour axe des y une perpendiculaire à AB au point B, centre du cercle de rayon variable, et désignons par a l'abscisse du point A et par R le rayon du cercle fixe qui a ce point pour centre. Si ρ est le rayon du cercle variable, une tangente à ce cercle a pour équation

$$x \cos \omega + y \sin \omega - \rho = 0,$$

ρ, ω désignant les coordonnées polaires d'un point du lieu. En écrivant que la distance du point A à cette tangente est égale à R, on obtient

$$a \cos \omega - \rho = \pm R$$

ou

$$\rho = a \cos \omega \pm R.$$

En prenant successivement les deux signes devant R, on obtient deux équations qui représentent le même limaçon de Pascal.

Ce résultat s'obtient d'ailleurs immédiatement en observant que le lieu considéré est la podaire du point B par rapport au cercle fixe de centre A. Cette podaire est un limaçon qui a le point B pour point double. Les tangentes en ce point sont réelles, imaginaires ou confondues selon que le point B est à l'extérieur, à l'intérieur ou sur la circonférence du cercle fixe.

J. Vigneaux, lycée de Toulouse.

---

91. — *On donne deux points fixes* A *et* B. *De* A *et* B *comme centres, on décrit deux cercles variables, mais tangents entre eux. Le lieu des points de contact des tangentes communes aux deux cercles se compose de deux limaçons de Pascal.*

Cherchons d'abord le lieu des points de contact situés sur le cercle de centre B. Prenons les mêmes axes que dans le problème précédent. Il suffira d'écrire que la distance du point A $(a, 0)$ à la tangente ayant pour équation

$$x \cos \omega + y \sin \omega - \rho = 0,$$

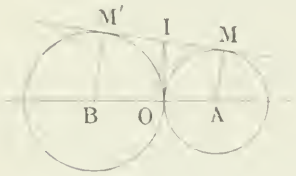
est égale à $a - \rho$; on obtient donc, en remarquant que les deux points A et B sont dans la même région de la tangente,

$$a \cos \omega - \rho = -(a - \rho)$$

ou

$$\rho = \frac{a}{2}(1 + \cos \omega),$$

qui est l'équation d'un limaçon de Pascal à point de rebroussement ou cardioïde, qui a le point B pour point double et le point A pour sommet.



Le lieu des points de contact des tangentes sur le cercle de centre A est de même une cardioïde ayant le point A pour point double et le point B pour sommet.

Ce résultat s'obtient géométriquement en observant que si par le milieu I de MM' on mène une perpendiculaire à cette droite, elle rencontre AB en un point O tel que

$$OI = \frac{MA + M'B}{2} = \frac{AB}{2} = OA = OB.$$

La droite MM' est donc tangente au cercle de diamètre AB, et le lieu cherché se compose des podaires des points A et B par rapport à ce cercle.

J. Vigneaux, lycée de Toulouse.

Ont résolu les questions **90** et **91** : MM. Audouin, marine, lycée de Cherbourg ; Auzeram, lycée de Toulouse ; Bergman, élémentaires, Saint-Louis ; A. Blondel, lycée d'Amiens ; Bourrienne, lycée de Rouen ; H. Chéronnet, école Monge ; G. Cuny, école Saint-Sigisbert, à Nancy ; Desgombes, Annecy ; Abel Dumas, lycée de Lyon ; F. Faure, Valence ; Ed. Galtier, lycée de Bordeaux ; André Haarbleicher, Condorcet ; Ed. Husson, lycée de Nancy ; E. Jacquest, lycée de Dijon ; R. Lévy, lycée Janson de Sailly ; Henri Loiseau, lycée de Clermont ; L. Perrée, Condorcet ; L.-P. Randon, Louis-le-Grand ; P.-F. Teilhet, Saint-Etienne.

---

92. — *En un point* A *de la circonférence d'un cercle donné on décrit un cercle quelconque tangent au premier. Si on fait varier le rayon de ce second cercle, le lieu des points de contact sur le cercle variable des tangentes communes au cercle fixe et au cercle variable est une cissoïde.*

Prenons pour axe des x le diamètre du cercle donné qui passe par A et pour axe Oy la tangente en A. L'équation de ce cercle s'écrit

$$x^2 + y^2 + 2ax = 0,$$

où l'on peut supposer $a > 0$. Si λ désigne le rayon d'un cercle variable, l'équation de ce cercle, tangent extérieurement au premier, sera

$$x^2 + y^2 - 2\lambda x = 0. \qquad (1)$$

Soit M un point du lieu; ses coordonnées x, y satisfont à l'équation (1). J'écris que la tangente en ce point ayant pour équation

$$X(x - \lambda) + Yy - \lambda x = 0,$$

est à la distance a du centre du cercle fixe, c'est-à-dire que

$$\frac{-a(x - \lambda) - \lambda x}{-\sqrt{(x - \lambda)^2 + y^2}} = a$$

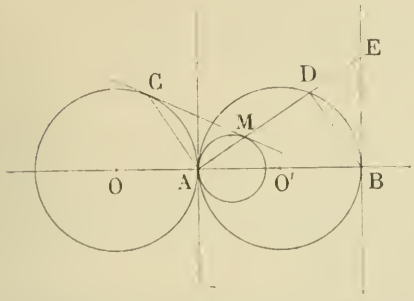
ou, tenant compte de l'équation (1), $\dfrac{-a(x-\lambda)-\lambda x}{-\lambda} = a,$ (2)

en observant que les centres des deux cercles sont tous deux dans la région négative de la tangente.

En éliminant λ entre (1) et (2), on obtient l'équation du lieu

$$x(x^2+y^2) - 2ay^2 = 0,$$

qui représente une cissoïde, facile à construire.



Solution géométrique. — Soit CM la tangente commune aux deux cercles; traçons le cercle O′ symétrique du cercle fixe O par rapport à la tangente en A; menons la tangente à ce cercle au point B, et prolongeons la droite AM qui rencontre le cercle O′ en D et la tangente en B au point E.

On sait que le triangle CAM est rectangle en A, par suite DB est parallèle à AC; il résulte de là que les cordes AC et DB sont égales et que les angles ACM et DBE sont égaux comme ayant même mesure dans des cercles égaux.

Les deux triangles rectangles CAM et BDE sont, par suite, égaux et AM = DE, ce qui montre que le lieu du point M est une cissoïde droite, ayant AB pour axe, A pour point de rebroussement et BE pour asymptote.

L.-P. Randon, lycée Louis-le-Grand.

Ont résolu cette question MM.: Bergman, élémentaires, Saint-Louis; E. Bourrienne, lycée de Rouen; H. Chéronnet, école Monge; G. Cuny, école Saint-Sigisbert, à Nancy; A. Delpierre, marine, collège de Dieppe; Abel Dumas, lycée de Lyon; F. Faure, Valence; André Haarbleicher, Condorcet; Ed. Hesson lycée de Nancy; E. Jacquest, lycée de Dijon; H. Loiseau, lycée de Clermont; L. Perrée, lycée Condorcet; A. Potilliart, lycée de Clermont; Gustave Soulié, lycée de Toulouse; P. F. Teilhet, Saint-Etienne; J. Vigneaux, lycée de Toulouse.

---

98. — *1° Représenter sur une même figure les trois courbes* A, B, C *dont les équations en coordonnées rectangulaires sont*

$$\begin{aligned} &A: && y^2 + 3a^2x^2 - 3axy - a^3 = 0,\\ &B: && y - x^3 = 0,\\ &C: && y + x^3 - 3ax = 0. \end{aligned}$$

2° Les points B, B′, C, C′ *où l'ellipse* A *rencontre les courbes* B *et* C *sont les sommets d'un parallélogramme. On demande les lieux décrits par les milieux des côtés de ce parallélogramme et par les sommets du parallélogramme formé par les tangentes à l'ellipse aux points* B, B′, C, C′ *quand le paramètre* a *varie.*

3° Montrer qu'il existe une valeur de a *et une seule telle que l'ellipse correspondante* A *soit réelle et passe par un point donné* P *du plan. On donnera l'expression explicite de la valeur de* a *au moyen des coordonnées du point* P.

4° Déterminer les coefficients angulaires des axes de l'ellipse A, *en distinguant les coefficients angulaires du petit axe et du grand axe.*

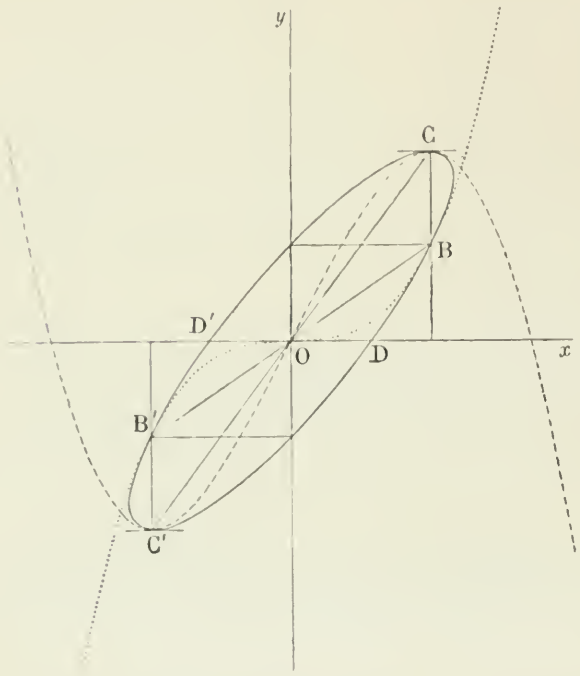
(*Bourses de licence, 1891.*)

1° La courbe A est une ellipse qui n'est réelle que si a est positif, ce que nous supposerons désormais; cette ellipse a son centre à l'origine et rencontre Ox en deux points D et D′ d'abscisses $\pm\sqrt{\dfrac{a}{3}}$.

Le diamètre conjugué de Ox, $y - 2ax = 0$, rencontre la courbe en deux points C et C′ symétriques par rapport au point O. Le point C situé dans l'angle des coordonnées positives a pour coordonnées $\sqrt{a}$ et $2a\sqrt{a}$. L'ellipse est ainsi déterminée par les deux diamètres conjugués OD et OC (en traits pleins sur la figure).

La courbe B est aisée à construire, elle a un point d'inflexion à l'origine; elle rencontre la

courbe A, en des points dont les coordonnées s'obtiennent en résolvant les équations A et B. En éliminant y, on a $(x^2 - a)^3 = 0$, ce qui montre qu'au point B de coordonnées $\sqrt{a}$ et $a\sqrt{a}$, les deux courbes A et B sont tangentes et ont un contact du deuxième ordre, elles se traversent; il en est de même au point symétrique B′. Cette courbe B est représentée en pointillé sur la figure.



Enfin la courbe C, représentée en traits discontinus, rencontre l'ellipse au point C, où elle admet avec l'ellipse un contact du deuxième ordre, ainsi qu'au point C′, symétrique de C par rapport à l'origine.

2° Il résulte de ce qui précède que dans le parallélogramme BCB′C′ les côtés BC et B′C′ sont parallèles à Oy. Les milieux de B′C et BC′ décrivent Oy. Le milieu I de BC a pour coordonnées

$$x = \sqrt{a}, \qquad y = \frac{3a\sqrt{a}}{2};$$

en éliminant a entre ces deux équations on obtient

$$y = \frac{3x^3}{2},$$

qui est l'équation du lieu du point I, ainsi que du point I′, milieu de B′C′; c'est une courbe homothétique de la courbe B.

La tangente à l'ellipse en B a pour équation

$$3ax - y - 2a\sqrt{a} = 0,$$

la tangente en C, parallèle à Ox, a pour équation

$$y = 2a\sqrt{a};$$

en éliminant a entre ces deux équations, on obtient

$$32y = 27x^3,$$

équation d'une courbe homothétique de la courbe B.

Remarquons que la tangente en B rencontre la tangente en C′ sur Oy, tandis que la tangente en B′ coupe la tangente en C sur la courbe précédente.

3° Tout revient à démontrer que l'équation

$$a^3 - 3a^2x^2 + 3axy - y^2 = 0 \qquad (1)$$

n'a qu'une racine positive. En substituant 0 et $+\infty$, dans le premier membre, on a des résultats de signes contraires, l'équation a donc au moins une racine positive; je dis qu'elle n'en a qu'une. Pour cela, faisons la transformation $a' = a - x^2$; il vient

$$(a' + x^2)^3 - 3x^2(a' + x^2)^2 + 3xy(a' + x^2) - y^2 = 0,$$

qui peut s'écrire

$$a'^3 + 3a'x(y - x^3) - (y - x^3)(y - 2x^3) = 0. \qquad (2)$$

C'est une équation de la forme $a'^3 + pa' + q = 0$,

dans laquelle

$$\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4} = \frac{y^2(y - x^3)^2}{4};$$

Cette quantité étant positive, l'équation (2) et par suite l'équation (1) n'a qu'une racine réelle positive.

La racine de l'équation (2) est donnée par la formule de Cardan

$$\alpha' = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}},$$

c'est-à-dire
$$a' = (y - x^3)^{\frac{2}{3}} - x(y - x^3)^{\frac{1}{3}},$$

d'où l'on tire la racine positive de l'équation (1)

$$a = x^2 - x(y - x^3)^{\frac{1}{3}} + (y - x^3)^{\frac{2}{3}}.$$

4° L'équation aux coefficients angulaires des axes de l'ellipse A est

$$3am^2 - 2m(3a^2 - 1) - 3a = 0. \qquad (3)$$

Le grand axe doit être situé dans l'angle aigu DOC des deux diamètres conjugués OC et OD, il correspond donc à la racine positive de l'équation (3), tandis que le petit axe a pour coefficient angulaire la racine négative de l'équation (3).

L. Perrée, lycée Condorcet.

M. H. Chéronnet, école Monge, a résolu la même question.

Remarque. — Le discriminant de l'équation complète du troisième degré

$$Ax^3 + 3Bx^2 + 3Cx + D = 0$$

est le même que celui des deux polynomes

$$Ax^2 + 2Bx + C \qquad \text{et} \qquad Bx^2 + 2Cx + D$$

c'est-à-dire
$$(AD - BC)^2 - 4(AC - B^2)(BD - C^2)$$

(voir par exemple, *Cours d'algèbre* par B. Niewenglowski, tome II, p. 395).

Le discriminant de l'équation en a,

$$a^3 - 3a^2x^2 + 3axy - y^2 = 0$$

est égal à
$$(x^3y - y^2)^2 \qquad \text{ou} \qquad y^2(x^3 - y)^2.$$

Ce discriminant est donc positif, à moins de supposer $y = 0$ ou $y = x^3$; dans ces deux cas, l'équation a une racine double.

Lorsque $y = 0$, l'équation se réduit à

$$a^3 - 3a^2x^3 = 0;$$

elle a une racine double $a = 0$, et une racine simple $a = 3x^2$.

Si $y = x^3$, l'équation se réduit à

$$a^3 - 3a^2x^2 + 3ax^4 - x^6 = 0,$$

et par suite se met sous la forme

$$(a - x^2)^3 = 0;$$

x^3 est alors racine triple.

PHYSIQUE

60. — *Une bouteille en fer munie d'un robinet contient un gaz liquéfié ; on en laisse échapper par ébullition un poids* p. *On demande :*

1° De calculer le volume V *occupé par le gaz sorti sous la pression* H *et à la température* t°, d_g *étant sa densité à* 0° *et à* 760 ;

2° D'exprimer le poids ω *de gaz formé tant à l'intérieur qu'à l'extérieur de la bouteille ; on désignera par* d_v *et* d_l *les poids spécifiques du gaz et du liquide dans les conditions où ils se trouvent dans le récipient ;*

3° Quelle sera la température finale x *de l'appareil, son équivalent en eau étant* P, *sa température initiale* t, *si l'on suppose qu'il n'emprunte pas de chaleur au milieu ambiant et si l'on représente par* l *la chaleur latente de vaporisation dans les conditions de l'expérience.*

$p = 65^{gr}$, $P = 125^{gr}$, $H = 754^{mm}$, $t = 15°$, $l = 90^{cal}$, $d_l = 1,43$, $d_g = 2,234$, $d_v = 0,0044$.

a, *poids du litre d'air à* 0 *et* 760 = $1^{gr},293$.

(École centrale, 1890, 1re session.)

1° La formule comme
$$p = V \cdot d_g \cdot 1,293 \frac{H}{760} \cdot \frac{1}{1 + \alpha t}$$
donne immédiatement
$$V = \frac{p}{1,293 \times d_g} \cdot \frac{760}{H}(1 + \alpha t) = 23^{lit},9.$$

2° Soit p_1 le poids du gaz formé à l'intérieur du récipient ; on aura
$$\omega = p + p_1.$$

Or $p_1 = v_1 d_v a_1$, v_1 désignant le volume primitivement occupé par p à l'intérieur du récipient a_1 le poids du litre d'air à $t°$, pression H. D'ailleurs
$$v_1 = \frac{p}{d}, \qquad a_1 = a \frac{H}{760} \frac{1}{1 + \alpha t};$$
donc
$$p_1 = \frac{p}{d_l} d_v \cdot a \frac{H}{760} \cdot \frac{1}{1 + \alpha t}$$
et
$$\omega = p + \frac{p}{d_l} d_v \cdot a \frac{H}{760} \cdot \frac{1}{1 + \alpha t}$$
$$= p\left[1 + a \frac{d_v}{d_l} \cdot \frac{H}{760} \frac{1}{1 + \alpha t}\right] = 65^{gr},243.$$

3° Le poids ω de gaz a absorbé en se vaporisant ωl calories et le récipient a perdu $P(t - x)$ calories. On aura par suite, en supposant que l'appareil n'emprunte pas de chaleur au milieu ambiant,
$$\omega l = P(t - x),$$
d'où
$$x = \frac{Pt - \omega l}{P} = t - \frac{\omega l}{P},$$
ce qui donne pour $t = 15°$ $l = 90^{cal}$, $P = 125^{gr}$
$$x = -32°.$$

(E Jossinet, lycée de Troyes.)

M. El Hesson, au lycée de Nancy, a envoyé une bonne solution.

CONCOURS DE 1891 *(Suite).*

ÉCOLE CENTRALE

Deuxième session.

Géométrie analytique.

120. — On donne deux axes rectangulaires et un cercle C passant par l'origine et dont le centre a pour coordonnées $x = -\frac{a}{2}$, $y = -\frac{b}{2}$. Dans ce cercle on mène deux cordes de longueur d, passant par l'origine.

D'un point de l'axe des x, dont l'abscisse est p, on mène des droites perpendiculaires à ces cordes. Cela étant :

1° On demande l'équation Δ du lieu des points tels que le produit de leurs distances aux cordes soit dans un rapport donné λ avec le produit de leurs distances aux droites perpendiculaires à ces cordes et le lieu des centres des coniques représentées par l'équation Δ lorsque λ varie;

2° On discutera la nature des coniques représentées par l'équation Δ.

3° Le rapport λ étant choisi de façon que la conique Δ devienne un cercle, on demande de trouver le lieu du centre de ce cercle lorsque le centre du cercle C décrit l'hyperbole $x^2 + nxy = \frac{d^2}{4}$.

(9 octobre, de 7 h. 1/2 à 11 h. 1/2.)

Calcul trigonométrique.

Soient a, b, c les côtés d'un triangle, R le rayon du cercle circonscrit, α, β, γ les hauteurs qui correspondent aux côtés a, b, c.

On donne les rapports $\frac{a}{R} = 1{,}543678$, $\frac{b}{R} = 1{,}254376$, et on demande de calculer les rapports $\frac{c}{R}$, $\frac{\alpha}{a}$, $\frac{\beta}{b}$, $\frac{\gamma}{c}$, en supposant l'angle A aigu.

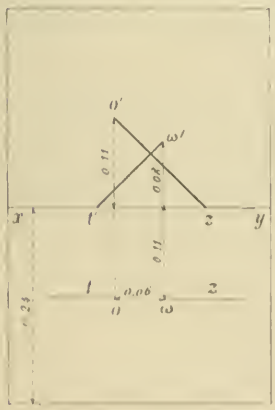
Résultats : $\frac{c}{R} = 1{,}999876$, $\frac{\alpha}{a} = 0{,}812538$, $\frac{\beta}{b} = 1{,}230558$, $\frac{\gamma}{c} = 0{,}484118$.

(9 octobre, de 2 h. 1/2 à 4 h.)

Épure.

INTERSECTION DE DEUX CONES DE RÉVOLUTION

121. — On donne deux cônes de révolution. Les deux axes (oz, $o'z'$) et (ωt, $\omega' t'$) sont de front, inclinés à 45° sur le plan horizontal et perpendiculaires entre eux. Le plan de front qui les contient est à $0^m,11$ en avant du plan vertical. La cote du sommet (o, o') est de $0^m,11$; celle du sommet (ω, ω') est de $0^m,08$; la distance $o\omega$ est de $0^m,06$; le milieu de $o\omega$ est à égale distance des grands côtés du cadre; le demi-angle au sommet de chacun des cônes est de 45°.



On demande de représenter par ses projections, ses contours apparents et leur ligne d'intersection, l'ensemble des deux cônes terminés d'une part au plan horizontal de projection et d'autre part au plan horizontal dont la cote est $0^m,17$.

On n'indiquera à l'encre rouge que les constructions nécessaires pour déterminer un point quelconque de l'intersection des deux cônes et la tangente en ce point, un point quelconque de chacune des sections planes qui limitent les cônes et les tangentes en ces points.

Placer la ligne de terre parallèlement aux petits côtés du cadre à $0^m,24$ du petit côté inférieur.

Titre extérieur : INTERSECTION DE CONES. — *Titre intérieur :* ASSEMBLAGE DE CONES.

Ce titre, en lettres dessinées, est de rigueur. Le cadre a $0^m,45$ sur $0^m,27$.
On exposera succinctement, sur une feuille à part, le procédé suivi pour chacune des déterminations précédentes.

(10 octobre, de 7 h. 1/2 à 11 h. 1/2.)

Physique et chimie.

I. — Un récipient de capacité invariable renferme 1^{kg} d'air sec à 0°; cet air s'y trouve sous la pression de $0^{m},760$ de mercure. On y refoule $2^{kg},313$ de gaz oxygène sec et $7^{kg},687$ de gaz azote sec, puis on élève à 100° la température du récipient.

On demande la pression finale dans cet appareil connaissant : le poids d'un litre d'air à 0° et $0^{m},760$: $1^{gr},293$; la densité de l'oxygène : 1,1056; la densité de l'azote : 0,972; le coefficient de dilatation des gaz : 0,00367.

II. — Énoncer très sommairement les principes du fonctionnement de la machine électrique à plateau de verre, dite machine de Ramsden.

III. — Les hydracides; leurs préparations.

Comment établit-on, par analyse, leur composition?

(10 octobre, de 1 h. 1/2 à 4 h. 1/2.)

QUESTIONS PROPOSÉES

122. — Étant donnés un polynome entier en x, $f(x)$, et un polynome entier $\varphi(x)$ premier avec sa dérivée $\varphi'(x)$, trouver tous les polynomes entiers $P(x)$ tels que

$$f(x) + P(x)\varphi'(x)$$

soit divisible par $\varphi(x)$.

Si le degré de $\varphi(x)$ est égal à m, montrer que l'on peut déterminer $P(x)$ de degré $m-1$ par exemple, sans résoudre l'équation $\varphi(x) = 0$.

* **123.** — Par un point donné, on mène des droites parallèles à un système de deux diamètres conjugués variables d'une conique C; démontrer que la droite joignant les milieux des cordes interceptées sur une seconde conique C′ passe par un point fixe.

RIPERT.

124. — Étant donné un triangle ABC, on considère toutes les hyperboles équilatères H conjuguées à ce triangle. Trouver le lieu des points de concours des tangentes communes à une conique fixe C et aux hyperboles H, ainsi que l'enveloppe des cordes communes à ces coniques.

(E. BÉTANCOURT, collège Stanislas.)

125. — 1° Trouver l'enveloppe d'une série d'ellipses concentriques ayant les mêmes directions d'axes et pour lesquelles la somme des axes est constante.

2° Trouver la développée de cette enveloppe.

(A. HUGRON.)

126. — La normale à une ellipse en un de ses points M rencontre la développée de l'ellipse en quatre points autres que son point de contact avec la développée. Prouver que les tangentes en ces points sont concourantes et trouver le lieu de leur point de concours quand le point M décrit l'ellipse.

(E. DUPORCQ, école Monge.)

ERRATUM. — Les questions n°s 111 à 114 ne doivent pas être précédées d'astérisques.

Le Rédacteur-Gérant : H. VUIBERT.

PARIS — IMP. CHAIX. — 23942-10-91.

2e Année. N° 3. Décembre 1891.

REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES (Concours de 1891).

Mathématiques spéciales.

105. — *Étant donnés un triangle* ABC *et deux points* P *et* Q *situés dans son plan, on considère les coniques* S *qui touchent le côté* CA *en* A *et passent par les points* P *et* Q; *on considère de même les coniques* S′ *qui touchent le côté* CB *en* B *et passent par les points* P *et* Q.

1° Soient M *et* N *les points d'intersection d'une conique* S *avec les droites* CP *et* CQ; M′ *et* N′ *les points d'intersection d'une conique* S′ *avec les mêmes droites. Démontrer que la droite* MN *passe par un point fixe* A_1 *et la droite* M′N′ *par un point fixe* B_1, *quand les coniques* S *et* S′ *varient.*

2° En substituant le triangle CA_1B_1 *au triangle* CAB *dans la définition des deux séries de coniques, on obtiendra deux nouveaux points* A_2, B_2 *et ainsi de suite; trouver l'équation de la droite* A_nB_n *et chercher sa position limite quand* n *devient infini.*

3° On suppose que les coniques S *et* S′ *varient de manière que les deuxièmes tangentes menées du point* C *à ces courbes soient conjuguées harmoniques par rapport aux droites* CP *et* CQ; *trouver, dans cette hypothèse, le lieu du point d'intersection des polaires d'un point donné* H *par rapport à ces coniques.*

4° Lorsque les coniques S *et* S′ *varient en restant tangentes, trouver le lieu de leur point de contact.*

Prenons pour triangle de référence le triangle CPQ. Soient respectivement $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ les équations des côtés CP, CQ, PQ. Désignons par x_0, y_0, z_0 les coordonnées du point A et par x_1, y_1, z_1 celles du point B. Les équations des droites CA, CB sont alors respectivement

$$xy_0 - yx_0 = 0, \qquad \text{(CA)}$$

$$xy_1 - yx_1 = 0. \qquad \text{(CB)}$$

De même, les équations des droites PA, PB sont

$$xz_0 - zx_0 = 0, \qquad \text{(PA)}$$

$$xz_1 - zx_1 = 0, \qquad \text{(PB)}$$

et celles des droites QA, QB sont

$$yz_0 - zy_0 = 0, \qquad \text{(QA)}$$

$$yz_1 - zy_1 = 0. \qquad \text{(QB)}$$

L'équation générale des coniques S qui touchent le côté CA en A et passent par les points P et Q est alors

$$\lambda(xy_0 - yx_0)z + (xz_0 - zx_0)(yz_0 - zy_0) = 0, \qquad (1)$$

et l'équation générale des coniques S′ qui touchent le côté CB en B et passent par les points P et Q est

$$\mu(xy_1 - yx_1)z + (xz_1 - zx_1)(yz_1 - zy_1) = 0. \qquad (2)$$

1° Soit

$$ux + vy + wz = 0$$

l'équation de la droite MN. Il existe deux nombres ρ et σ tels que l'on ait identiquement

$$(xz_0 - zx_0)(yz_0 - zy_0) + \lambda z(xy_0 - yx_0) + \rho z(ux + vy + wz) = \sigma xy.$$

En égalant dans les deux membres les coefficients de yz, xz, z^2, on obtient les trois équations

$$\begin{cases} -x_0z_0 - \lambda x_0 + \rho v = 0, \\ -y_0z_0 + \lambda y_0 + \rho u = 0, \\ x_0y_0 \qquad\quad + \rho w = 0. \end{cases}$$

On déduit de là
$$\begin{vmatrix} -y_0z_0 & y_0 & u \\ -x_0z_0 & -x_0 & v \\ x_0y_0 & 0 & w \end{vmatrix} = 0$$
ou
$$x_0u + y_0v + 2z_0w = 0. \qquad (3)$$

Cette équation montre que la droite (u, v, w) passe par un point fixe, le point A_1, de coordonnées $(x_0, y_0, 2z_0)$. Ce point se trouve évidemment sur la droite CA. De plus, si l'on appelle D le point de rencontre de PQ avec CA, les quatre points C, A_1, A, D forment une division harmonique. En effet, si l'on désigne par x_0, y_0, ρz_0 les coordonnées d'un point quelconque de la droite CA, le rapport anharmonique de quatre points de cette droite est égal au rapport anharmonique des quatre valeurs de ρ. Ici ces quatre valeurs sont ∞, 2, 1, 0; ces nombres forment bien une proportion harmonique.

De même, la droite M'N' passe par un point fixe B_1 de la droite CB dont les coordonnées sont x_1, y_1, $2z_1$ et qui est conjugué harmonique du point d'intersection E de PQ et de CB par rapport aux deux points C et B.

2° Si nous remplaçons le triangle CAB par le triangle CA_1B_1, cela revient à remplacer respectivement z_0 et z_1 par $2z_0$ et $2z_1$. On a ainsi deux nouveaux points A_2 et B_2, de coordonnées x_0, y_0, 2^2z_0 et x_1, y_1, 2^2z_1. Et ainsi de suite. Les coordonnées des points A_n et B_n sont x_0, y_0, 2^nz_0 d'une part, et x_1, y_1, 2^nz_1 d'autre part. L'équation de la droite A_nB_n est alors
$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ x_0 & y_0 & 2^nz_0 \\ x_1 & y_1 & 2^nz_1 \end{vmatrix} \equiv 2^n \begin{vmatrix} x & y & \frac{1}{2^n}z \\ x_0 & y_0 & z_0 \\ x_1 & y_1 & z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

On voit que cette droite passe constamment par le point F d'intersection de la droite AB et de la droite PQ. Lorsque n augmente indéfiniment, l'équation se réduit à
$$\begin{vmatrix} x & y & 0 \\ x_0 & y_0 & z_0 \\ x_1 & y_1 & z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

La droite passe alors par le point C; c'est donc la droite CF.

Si nous appelons A_{-1}, B_{-1} les points d'où l'on déduirait A, B de la même façon qu'on déduit A_1, B_1 de A, B, on a pour l'équation de la droite $A_{-1}B_{-1}$
$$\begin{vmatrix} x & y & 2z \\ x_0 & y_0 & z_0 \\ x_1 & y_1 & z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

L'équation de la droite $A_{-n}B_{-n}$ est
$$\begin{vmatrix} x & y & 2^nz \\ x_0 & y_0 & z_0 \\ x_1 & y_1 & z_1 \end{vmatrix} = 0,$$
et lorsque n augmente indéfiniment, cette droite tend aussi vers une position limite. L'équation de la droite limite est $z = 0$: c'est la droite PQ.

3° L'équation quadratique des tangentes issues du point C à l'une quelconque des coniques S peut s'écrire
$$4f(x, y, 0)f(0, 0, 1) - (xf'_\alpha + yf'_\beta)^2_{\alpha=0,\beta=0,\gamma=1} = 0,$$
en appelant f le premier membre de l'équation de S, c'est-à-dire
$$-4x_0y_0z_0^2xy + [\lambda(xy_0 - yx_0) - z_0(xy_0 + yx_0)]^2 = 0,$$
ce qui peut s'écrire, en remarquant que $xy_0 - yx_0$ doit se trouver en facteur,
$$(xy_0 - yx_0)[(\lambda - z_0)^2xy_0 - (\lambda + z_0)^2yx_0] = 0.$$

L'équation de la seconde tangente issue de C à la conique S est donc

$$(\lambda - z_0)^2 y_0 x - (\lambda + z_0)^2 x_0 y = 0. \tag{4}$$

Celle de la seconde tangente issue de C à la conique S′ est

$$(\mu - z_1)^2 y_1 x - (\mu + z_1)^2 x_1 y = 0. \tag{5}$$

Pour que ces deux droites soient conjuguées par rapport à CP et CQ, il faut et il suffit que

$$\frac{(\lambda - z_0)^2 y_0}{(\lambda + z_0)^2 x_0} + \frac{(\mu - z_1)^2 y_1}{(\mu + z_1)^2 x_1} = 0,$$

ou

$$\pm \sqrt{-\frac{x_0 y_1}{y_0 x_1}} \cdot \frac{\mu - z_1}{\mu + z_1} = \frac{\lambda - z_0}{\lambda + z_0}. \tag{6}$$

On a ainsi deux relations, et il faut que l'une d'elles soit vérifiée pour que les coniques S et S′ considérées satisfassent aux conditions de l'énoncé. Il faut $x_0 y_1 y_0 x_1 < 0$, c'est-à-dire que CA, CB ne soient pas dans le même angle par rapport à CP, CQ.

Cela étant, prenons deux coniques S et S′ satisfaisant à l'équation (6) et considérons un point fixe H (α, β, γ). L'équation de la polaire de H par rapport à S peut se mettre sous la forme

$$A + \lambda B = 0. \tag{7}$$

L'équation de la polaire de H par rapport à S′ peut se mettre sous la forme

$$C + \mu D = 0, \tag{8}$$

A, B, C, D étant des fonctions linéaires de x, y, z qui ne dépendent pas de λ, μ. Le lieu du point de rencontre de ces polaires s'obtient en éliminant λ, μ entre (6), (7), (8). On obtient ainsi

$$\frac{A + z_0 B}{A - z_0 B} = \pm \sqrt{-\frac{x_0 y_1}{y_0 x_1}} \cdot \frac{C + z_1 D}{C - z_1 D}. \tag{9}$$

Le lieu se compose, comme on voit, de deux coniques. Chacune de ces coniques passe par les points $(A = 0, B = 0)$, $(C = 0, D = 0)$. Le premier de ces points est le point de rencontre des polaires de H par rapport aux angles PAQ, CDP, c'est le point fixe par où passent les polaires de H par rapport aux coniques S; le second point est le point fixe par où passent les polaires de H par rapport aux coniques S′. Chacune de ces coniques passe également par le point de rencontre des droites $A + z_0 B = 0$, $C + z_1 D = 0$; ces droites D_0, D_1 sont les polaires de H par rapport aux coniques S et S′ qui correspondent aux valeurs z_0, z_1 des paramètres λ, μ; ces coniques, comme on le vérifie facilement, sont tangentes en Q à la droite CQ. Enfin le quatrième point commun aux deux coniques est le point d'intersection des polaires Δ_0, Δ_1 de H par rapport aux coniques S et S′ qui sont tangentes en P à la droite CP. Nous voyons ainsi que D_0, Δ_1 forment un système de sécantes communes aux deux coniques, de même Δ_0, D_1. Enfin à chaque point commun aux coniques, les tangentes aux deux coniques sont conjuguées harmoniques par rapport à celles des droites D_0, D_1, Δ_0, Δ_1 qui passent par ce point.

4° Soient (x, y, z) les coordonnées d'un point de contact de deux coniques S et S′ correspondant aux paramètres λ, μ. On a d'abord

$$f = (xz_0 - zx_0)(yz_0 - zy_0) + \lambda z(xy_0 - yx_0) = 0,$$
$$\varphi = (xz_1 - zx_1)(yz_1 - zy_1) + \mu z(xy_1 - yx_1) = 0.$$

Écrivons ensuite que les polaires du point par rapport aux deux coniques coïncident. Il suffit d'écrire

$$\frac{f'_x}{\varphi'_x} = \frac{f'_y}{\varphi'_y}$$

ou

$$\frac{z_0(yz_0 - zy_0) + \lambda z y_0}{z_1(yz_1 - zy_1) + \mu z y_1} = \frac{z_0(xz_0 - zx_0) - \lambda z x_0}{z_1(xz_1 - zx_1) - \mu z x_1}.$$

En remplaçant dans cette équation λ et μ par leurs valeurs tirées des deux premières on obtient, en chassant la solution $z = 0$.

$$\frac{yz_0 - zy_0}{yz_1 - zy_1} \cdot \frac{z_0(xy_0 - yx_0) - y_0(xz_0 - zx_0)}{z_1(xy_1 - yx_1) - y_1(xz_1 - zx_1)} = \frac{xz_0 - zx_0}{xz_1 - zx_1} \cdot \frac{z_0(xy_0 - yx_0) + x_0(yz_0 - zy_0)}{z_1(xy_1 - yx_1) + x_1(yz_1 - zy_1)}$$

ou

$$\pm\sqrt{\frac{x_0y_1}{x_1y_0} \cdot \frac{yz_0 - zy_0}{yz_1 - zy_1}} = \frac{xz_0 - zx_0}{xz_1 - zx_1}.$$

Le lieu se compose de deux coniques qui passent par les points P, Q, A, B. En chacun de ces points, au point A par exemple, les tangentes aux deux coniques sont conjuguées harmoniques par rapport aux droites AP, AQ; de même au point P les tangentes sont conjuguées par rapport aux droites PA, PB.

SOLUTION GÉOMÉTRIQUE

On peut d'abord démontrer ainsi la première partie.

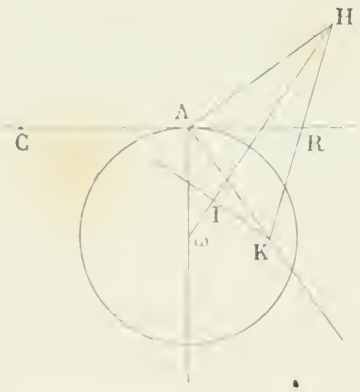
Si l'on considère le quadrilatère MNPQ inscrit dans la conique S, la transversale CA détermine sur la conique S et sur les côtés opposés du quadrilatère une involution dont A et C sont évidemment les points doubles. Par suite le point A_1 d'intersection de MN et de CA, est conjugué de D par rapport aux points C, A; la droite MN passe donc par un point fixe que nous savons déterminer.

Faisons une projection qui amène les points P et Q aux points circulaires à l'infini Les coniques S et S′ deviennent alors des cercles.

1° Considérons un des cercles S; les droites CP, CQ forment ici le cercle de rayon nul ayant pour centre le point C, et la droite MN est l'axe radical de ce cercle et du cercle S. Cet axe radical passe évidemment par le milieu A_1 de CA, c'est-à-dire par le conjugué harmonique du point d'intersection de CA et de PQ par rapport à C, A. De même on a un point B_1 au milieu de CB. La droite A_1B_1 qui joint les milieux des côtés CA, CB est parallèle à AB, c'est-à-dire passe par le point d'intersection F de AB et de PQ et est conjuguée de PQ par rapport à AB et FC.

2° Le point A_2 est le milieu de AA_1, le point A_3 le milieu de AA_2, et ainsi de suite. Les droites A_1B_1, A_2B_2,... sont toutes parallèles à AB et tendent vers une position limite, la parallèle à AB menée par le point C.

3° Démontrons d'abord que la polaire d'un point fixe H par rapport à tous les cercles S, passe par un point fixe. Soient Δ la polaire de H par rapport à un cercle S de centre ω, K le point d'intersection de Δ avec la perpendiculaire à AH menée par le point A, I le point d'intersection de Δ et de ωH. Le quadrilatère AHIK est inscriptible, et comme $\overline{\omega A}^2 = \omega I . \omega H$, la droite ωA est tangente au cercle circonscrit à ce quadrilatère, et le centre de ce cercle est sur CA. D'autre part, l'angle HAK étant droit, le centre est aussi sur HK; il est donc au point d'intersection R de HK et de CA; autrement dit, le point K est sur la parallèle à CA menée à la même distance de CA que le point H: il est donc fixe.

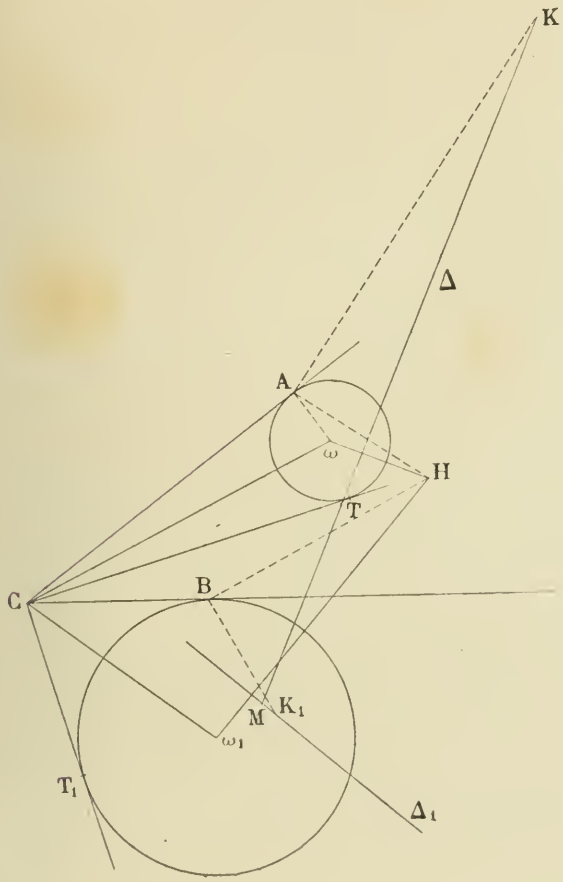


Cela étant, soit de même K_1 le point fixe par où passent les polaires de H par rapport aux cercles S′. Considérons deux cercles S et S′ tels que les deuxièmes tangentes CT, CT_1 menées de C soient conjuguées par rapport à CP, CQ, c'est-à-dire soient rectangulaires. Si nous prenons pour sens positif de rotation autour du point C le sens qui amène CA vers CB par le plus petit angle possible, l'angle de CT avec CT_1 peut être égal soit à $+\frac{\pi}{2}$, soit à $-\frac{\pi}{2}$.

Si l'on appelle ω, ω_1 les centres des cercles considérés, on a dans tous les cas, en grandeur et en signe,

$$(\omega C\omega_1)=(AC\omega_1)-(AC\omega)=\frac{(ACB)+(ACT_1)-(ACT)}{2}$$

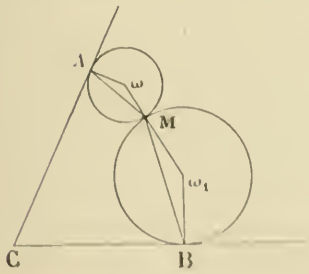
$$=\frac{(ACB)+(TCT_1)}{2}=\frac{C\pm\frac{\pi}{2}}{2}=C^{te}.$$



L'angle $\omega C\omega_1$ est donc constant et égal soit à $\frac{C}{2}+\frac{\pi}{4}$, soit à $\frac{C}{2}-\frac{\pi}{4}$. Cela va nous montrer que le lieu se décompose.

Pour avoir un point du lieu, nous menons une droite quelconque Δ par K, nous menons par H une perpendiculaire à cette droite qui rencontre la perpendiculaire à CA en A au point ω. Nous menons par C une droite $C\omega_1$ telle que $(\omega C\omega_1)=\frac{C}{2}+\frac{\pi}{4}$. Nous tirons $H\omega_1$ et nous abaissons de K_1 la perpendiculaire Δ_1 sur $H\omega_1$. Cette droite détermine avec Δ un point du lieu. Or lorsque Δ varie, la droite $H\omega$ perpendiculaire à Δ forme un faisceau en involution avec le faisceau Δ, la droite $C\omega$ forme un faisceau homographique avec le faisceau $H\omega$, la droite $C\omega_1$ un faisceau homographique avec $C\omega$ (d'après une propriété connue), la droite $H\omega_1$ un faisceau homographique avec $C\omega_1$ et enfin la droite Δ_1 perpendiculaire sur $H\omega_1$ un faisceau en involution avec $H\omega_1$. Par suite la droite Δ_1 forme un faisceau homographique avec le faisceau Δ. Il en résulte que le lieu du point d'intersection de Δ et de Δ_1 est une conique passant par les sommets K, K_1 des deux faisceaux. On a une deuxième conique en prenant $\frac{C}{2}-\frac{\pi}{4}$ au lieu de $\frac{C}{2}+\frac{\pi}{4}$.

4° Considérons deux cercles S et S′ tangents entre eux en M et soient ω, ω_1 leurs centres. Menons les droites $M\omega\omega_1$, ωA, $\omega_1 B$, MA, MB. On a, dans le cas de la figure,



$$C+\widehat{MAC}+\widehat{MBC}+\widehat{AMB}=2\pi.$$

D'autre part,

$$\widehat{AMB}=\pi-\widehat{\omega MA}-\widehat{\omega_1 MB}=\frac{\pi}{2}-\widehat{\omega AM}+\frac{\pi}{2}-\widehat{\omega_1 BM}$$

ou

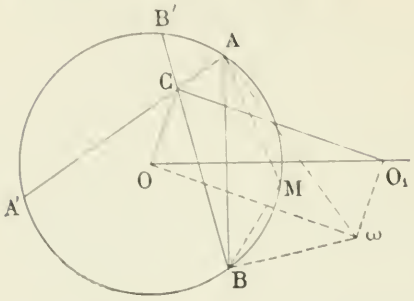
$$\widehat{AMB}=\widehat{MAC}+\widehat{MBC}.$$

On a donc

$$\widehat{AMB}=\pi-\frac{C}{2}.$$

Le point M se trouve donc sur la circonférence passant par A, B, et segment capable de l'angle $\pi-\frac{C}{2}$. Soit O cette circonférence. Si l'on prolonge CA, CB jusqu'en

A, B′, l'arc A′B′ doit être égal à l'arc AB ; par suite le centre O est sur une des bissectrices de l'angle ACB ; il est en même temps sur la perpendiculaire élevée au milieu de AB. — Il y a une autre circonférence que nous aurions obtenue en partant d'une autre position de M ; son centre O_1 est sur l'autre bissectrice de l'angle ACB. — La circonférence circonscrite au triangle ABC passe par le point O puisque ACB = AOB, et aussi par O_1, et comme l'angle OCO_1 est droit, il en résulte que l'angle OAO_1 est droit ; donc les deux circonférences dont se compose le lieu sont orthogonales. — En revenant au problème primitif, nous voyons que le lieu se compose de deux coniques passant par les points A, B, P, Q, et les tangentes à ces deux coniques au point A par exemple sont conjuguées par rapport aux droites AP, AQ. — Si l'on considère les rayons doubles de l'involution déterminée par les couples de rayons CA, CB; CP, CQ, les pôles de la droite PQ par rapport à ces deux coniques sont sur ces rayons doubles, ce qui détermine complètement ces coniques.



Remarque relative au problème de mathématiques élémentaires (*) de l'agrégation. — Considérons le quatrième sommet ω du rectangle construit sur Cω, $C\omega_1$. Le cercle circonscrit au triangle CAB passe comme nous l'avons vu par les points C, O, O_1 et par suite aussi par ω, et de plus Cω en est un diamètre. Il en résulte que ωA est perpendiculaire sur CA et de même ωB sur CB. Considérons une sphère décrite de ω comme centre avec un rayon quelconque et un des points de cette sphère qui se projette orthogonalement sur le plan de la figure en ω. Soient A′, B′ les points de la sphère dont la projection stéréographique de centre Ω est A, B. Les cercles S peuvent être considérés comme les projections stéréographiques de petits cercles de la sphère tous tangents entre eux en A, la tangente étant une certaine droite D parallèle au plan de la figure et dont la projection est CA. De même les cercles S′ sont les projections stéréographiques de petits cercles de la sphère tous tangents en B′ à une certaine droite D′ parallèle au plan de la figure. Étant donnés deux cercles S, S′ tangents en M, projection stéréographique de M′, leur tangente commune en M′ dans l'espace est une droite qui rencontre évidemment les droites D et D′. Le lieu du point M ce composant de deux cercles, il en résulte que le lieu du point de contact d'une droite tangente à la sphère et rencontrant deux tangentes D, D′ à cette sphère se compose de deux petits cercles de cette sphère orthogonaux entre eux et passant par les points de contact des tangentes D, D′.

E. Cartan
(Élève sortant de l'École normale supérieure, reçu le premier à l'Agrégation des sciences mathématiques. — 1891.)

Autres solutions : MM. Rech Camille (Nancy); Ernest Duporcq (École Monge); Henri (Louis-le-Grand); A. Alayrac (Saint-Louis).

Pour trouver la quatrième partie, après avoir transformé homographiquement, M. E. Duporcq transforme de nouveau par inversion, en prenant pour pôle le point de contact A de l'un des cercles ω sur CA ; on a alors à trouver le lieu des points de contact des droites parallèles à CA avec des cercles tangents entre eux en un point fixe β, inverse de B. Ce lieu se compose évidemment de deux droites orthogonales fixes passant par β. Donc le lieu des points de contact des cercles considérés se compose de deux cercles orthogonaux passant par A et B.

(*) L'énoncé et une solution de M. A. Tresse sont insérés dans le numéro du 15 novembre 1891 du *Journal de mathématiques élémentaires*.

ÉCOLE CENTRALE (Concours de 1891. — 1re Session.)

108. — *On donne deux axes rectangulaires* Ox, Oy, *et, sur l'axe des* x, *un point* A *dont l'abscisse est* a. *On considère le faisceau des ellipses pour lesquelles le point* O *est un sommet d'axe non focal et la parallèle à l'axe des* y *menée par le point* A *une directrice.*

I. — Démontrer que la condition nécessaire et suffisante pour que deux ellipses du faisceau considéré passent par un point donné P *est que ce point soit à l'intérieur du cercle qui a le point* O *pour centre et* OA *pour rayon.*

II. — Démontrer que ce cercle a un double contact, réel ou imaginaire, avec chacune des ellipses du faisceau.

III. — Limiter les régions du plan dans lesquelles doit être situé un point P :

1° Pour qu'une seule des deux ellipses du faisceau qui passent par ce point ait avec le cercle un double contact réel ;

2° Pour que chacune des deux ellipses du faisceau qui passent par ce point ait avec le cercle un double contact réel ;

3° Pour qu'aucune des deux ellipses du faisceau qui passent par ce point n'ait avec le cercle un double contact réel.

IV. — Lieu des pieds des normales menées par le point O *à toutes les ellipses du faisceau.*

L'équation d'une ellipse ayant son centre sur l'axe Oy, le grand axe étant parallèle à Ox, est de la forme

$$\frac{x^2}{u^2} + \frac{(y-\lambda)^2}{\lambda^2} = 1, \qquad (u^2 > \lambda^2),$$

λ étant l'ordonnée du centre et en même temps, au signe près, la longueur du demi petit axe.

La distance de la directrice au centre est égale à $\dfrac{u^2}{\sqrt{u^2-\lambda^2}}$; on doit donc poser

$$u^2 = a\sqrt{u^2-\lambda^2}.$$

La courbe ne peut être réelle qu'autant que λ^2 sera inférieur à u^2; nous pouvons donc poser $\lambda = u \sin\varphi$, ce qui donne $u = a\cos\varphi$ et par suite $\lambda = a\sin\varphi\cos\varphi$. L'équation de l'ellipse devient ainsi

$$x^2\sin^2\varphi + y^2 - 2ay\sin\varphi\cos\varphi = 0$$

ou, en posant

$$\operatorname{tg}\varphi = \mu,$$

$$\mu^2x^2 + (1+\mu^2)y^2 - 2a\mu y = 0. \qquad (1)$$

Telle est l'équation générale des ellipses satisfaisant aux conditions données.

Le foyer correspondant à la directrice donnée a pour coordonnées $y = \lambda$, $x = \sqrt{u^2-\lambda^2}$, ce qui donne $u^2 = x^2 + y^2 = ax$; donc les foyers réels des ellipses considérées décrivent le cercle construit sur OA comme diamètre et le cercle symétrique par rapport à Oy.

I. — Remarquons d'abord que si $\mu = 0$, l'équation précédente se réduit à $y^2 = 0$ et représente une droite double. Laissant ce cas particulier de côté, nous voyons que la conique représentée

par l'équation (1) coupe l'axe des y à l'origine et au point ayant pour ordonnée $\frac{2a\mu}{1+\mu^2}$; donc pour que l'équation (1) représente une ellipse réelle, il faut et il suffit que la valeur attribuée au paramètre μ soit réelle et différente de zéro.

Soit $P(x_1, y_1)$ un point donné ; pour que l'ellipse (1) passe par le point P il faut et il suffit que μ soit l'une des racines de l'équation

$$\mu^2(x_1^2 + y_1^2) - 2a\mu y_1 + y_1^2 = 0. \qquad (2)$$

Donc il passe deux ellipses du faisceau par tout point P du plan. Pour que ces ellipses soient réelles, il faut et il suffit que les racines de l'équation (2) soient réelles, ce qui exige

$$y_1^2(a^2 - x_1^2 - y_1^2) > 0.$$

Nous supposons $y_1 \neq 0$, sans quoi la conique se réduirait, comme nous l'avons vu, à une droite double; la condition de réalité est donc

$$x_1^2 + y_1^2 - a^2 < 0,$$

ce qui exprime que le point P doit être à l'intérieur du cercle de centre O et de rayon OA.

Si le point P est sur ce cercle, les deux ellipses se confondent en une seule, qui est réelle et correspond à

$$\mu = \frac{ay_1}{x_1^2 + y_1^2} = \frac{y_1}{a}.$$

II. — L'équation (1) peut s'écrire évidemment sous cette forme :

$$\mu^2(x^2 + y^2 - a^2) + (y - a\mu)^2 = 0, \qquad (3)$$

ce qui prouve que les ellipses du faisceau sont bitangentes au cercle OA, la corde des contacts ayant pour équation

$$y = a\mu.$$

Si les racines de l'équation (2) sont réelles, elles ont toutes deux le signe de y_1, car leur produit est positif et leur somme a le signe de y_1; quand on change y_1 en $-y_1$, elles changent de signe sans changer de valeur; or, à deux valeurs de μ égales et de signes contraires correspondent deux coniques du faisceau, symétriques par rapport à Ox. Il en résulte que, pour étudier ces coniques, il suffit de supposer le point P d'un côté déterminé de Ox; par exemple, nous supposerons, pour fixer les idées, $y_1 > 0$, et, par suite, $\mu > 0$.

III. — Cela posé, la droite représentée par $y = a\mu$ $(\mu > 0)$, coupe le cercle OA en deux points réels quand μ est inférieur à 1, lui est tangente si $\mu = 1$, et le coupe en des points imaginaires si μ est plus grand que 1. Si l'on remplace μ par zéro dans le premier membre de l'équation (2), on obtient un résultat positif (en supposant $y_1 > 0$); en substituant + 1, on trouve

$$x_1^2 + 2y_1^2 - 2ay_1.$$

Désignons ce résultat par E et construisons l'ellipse qui a pour équation

$$x^2 + 2y^2 - 2ay = 0. \qquad (E)$$

C'est une ellipse du faisceau; elle touche le cercle OA au point B $(x = 0,\ y = a)$ et a pour centre le milieu de OB; son petit axe a donc pour longueur a, et son grand axe a pour longueur $a\sqrt{2}$.

Cela étant, si le point P est à l'intérieur de cette ellipse, on a $E < 0$, comme on s'en assure aisément. Donc dans ce cas l'une des racines de l'équation (2) est plus petite que 1, l'autre est supérieure à 1; une seule des ellipses du faisceau a un contact réel, l'autre a un contact imaginaire.

Si l'on compare les deux ellipses représentées par les équations

$$x^2 + 2y^2 - 2ay = 0,$$

$$\mu^2 x^2 + (1 + \mu^2) y^2 - 2a\mu y = 0,$$

on voit que les points communs à ces deux courbes sont sur le faisceau de droites représenté par l'équation

$$(\mu + 1) y^2 - 2a\mu y = 0,$$

qui se décompose en $y = 0$, ou l'axe des x, et

$$y = \frac{2a\mu}{\mu + 1}.$$

Si l'on suppose $\mu > 1$, on a $\frac{2a\mu}{\mu + 1} > a$; donc les deux ellipses n'ont d'autre point réel commun que le point O, l'ellipse (μ) est intérieure à l'ellipse (E); au contraire si l'on suppose $\mu < 1$, ces deux courbes ont deux points communs réels autres que le point O.

Si le point P vient se placer sur l'ellipse E, en P′ par exemple, l'une des racines de l'équation (2) est égale à 1, la seconde, égale à $\frac{y_1^2}{x_1^2 + y_1^2}$, est plus petite que l'unité; les deux ellipses, dont l'une est alors précisément l'ellipse (E), ont donc toutes les deux des contacts réels avec le cercle OA *(fig. 1)*

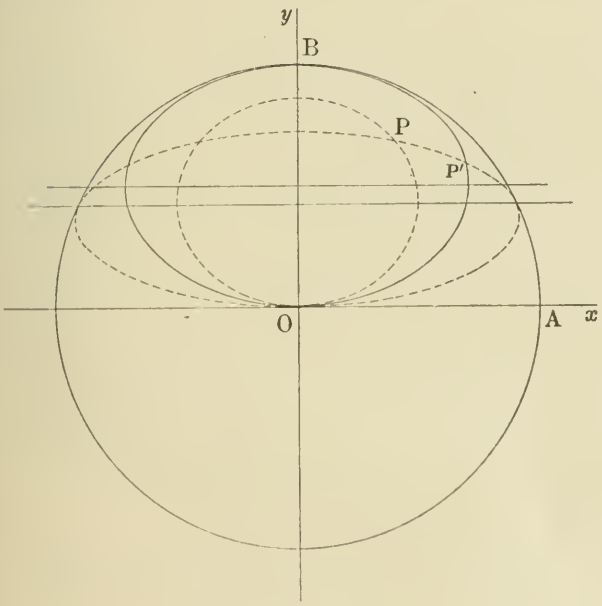


Fig. 1.

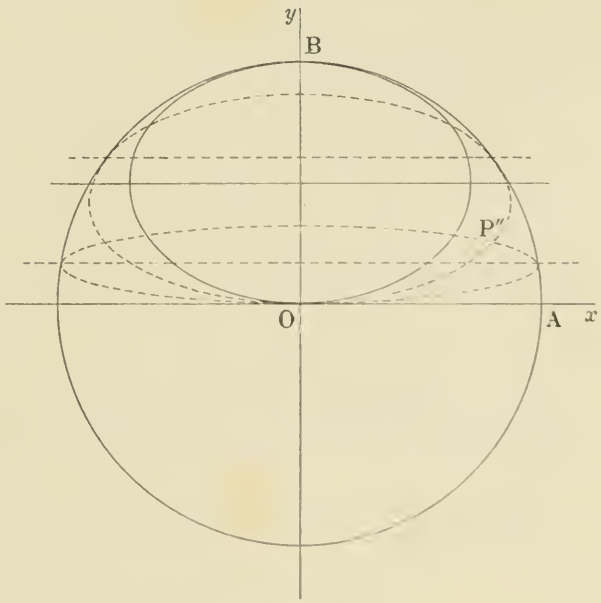


Fig. 2.

Supposons le point P à l'extérieur de l'ellipse (E), mais toujours à l'intérieur du cercle OA, en P″ par exemple *(fig. 2)*, le résultat de la substitution de + 1 est positif; mais le produit des racines est inférieur à 1, donc les deux racines sont toutes deux plus petites que l'unité, et par suite les deux ellipses ont des contacts réels avec le cercle OA, et coupent toutes deux en deux points réels l'ellipse (E).

Quand le point P vient sur le cercle OA, les deux ellipses se réduisent à une seule ayant évidemment deux points de contact réels avec le cercle OA, parce que ces points sont alors confondus avec le point P et avec son symétrique par rapport à Oy.

Enfin si le point P est extérieur au cercle OA, les ellipses sont imaginaires et par suite les points de contact sont aussi imaginaires.

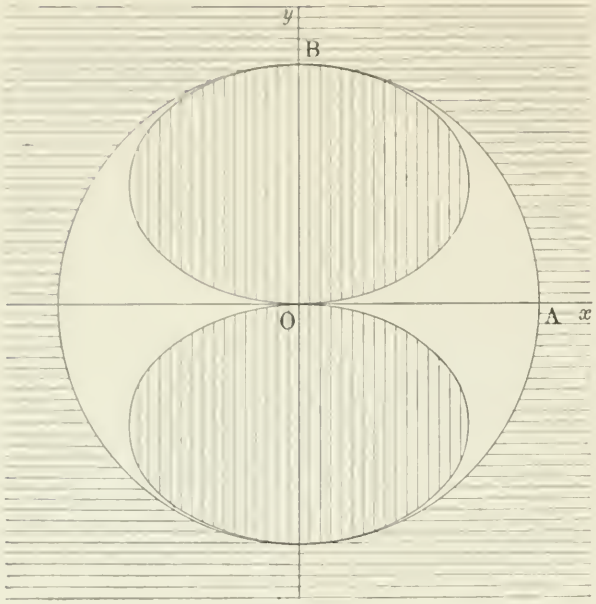


Fig. 3.

En résumé *(fig. 3)*, les points correspondant à un seul contact réel, sont à l'intérieur des ellipses symétriques E, E_1 (hachures verticales); les points correspondant à deux contacts réels sont entre ces ellipses et le cercle OA et sur ces courbes; les points situés à l'extérieur du cercle OA correspondent à des contacts imaginaires. Les points situés sur l'axe des x donnent une droite double; on peut dire qu'ils correspondent à des contacts réels.

IV. — Les pieds des normales à l'une des ellipses (1), menées par l'origine, sont à l'intersection de cette ellipse et de l'hyperbole représentée par l'équation

$$xf'_y - yf'_x = 0,$$

ce qui donne, après simplifications,

$$x(y - a\mu) = 0. \qquad (4)$$

On a donc à éliminer μ entre les équations (1) et (4). On trouve d'abord $x = 0$, c'est-à-dire l'axe des y; puis, en remplaçant dans (1) μ par $\frac{y}{a}$,

$$y^2(x^2 + y^2 - a^2) = 0,$$

ce qui donne le cercle OA, puisque les coniques sont tangentes à ce cercle, et enfin l'axe des x, qui correspond à $\mu = 0$, c'est-à-dire aux coniques réduites à une droite double confondue avec Ox. Tous ces résultats sont évidents *a priori*.

Ont résolu la question : MM. Bourrienne ; Galtier (Bordeaux) ; Geneix-Chabanier (Marseille) ; A. Gérard (lycée Saint-Louis) ; R. Lévy (Janson de Sailly) ; Piedanna (Janson de Sailly) ; Vazou (professeur au collège de Falaise).

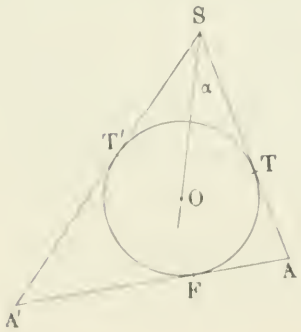
---

31. — *Le volume d'un cône de révolution circonscrit à une sphère, limité par une section elliptique dont le plan est tangent à la sphère, est égal à*

$$k\sqrt{p^3},$$

k étant indépendant du plan de base, et p *étant le demi-périmètre du triangle section principale du cône.*

En déduire le cône minimum circonscrit à une sphère, ou à un ellipsoïde.



Soit SAA′ le plan perpendiculaire au plan sécant et passant par l'axe d'un cône de révolution, circonscrit à la sphère O. SA et SA′ sont les génératrices situées dans ce plan sécant. AA′ la trace du plan de la section elliptique sur le plan SAA′; enfin soient T, T′, F les points de contact de ces droites avec le cercle inscrit dans le triangle SAA′. Posons

$$FA = x, \qquad FA' = y.$$

Si l'on désigne par $2a$ et $2b$ les axes de la section elliptique :

$$x + y = 2a, \qquad x = a - c, \qquad y = a + c,$$

c étant égal à $\sqrt{a^2 - b^2}$; d'où $\qquad b^2 = xy.$

Si l'on désigne par V le volume du cône et par h sa hauteur,

$$3V = \pi abh.$$

Soient $2p$ le périmètre du triangle SAA′, r le rayon du cercle inscrit et α le demi-angle d'ouverture du cône. Or, puisque $AA' = 2a$, la surface du triangle SAA′ est égale à ah, donc

$$ah = pr;$$

par suite
$$3\,V = \pi . pr\sqrt{xy}\,.$$

Si l'on désigne par A, B, C les trois côtés du triangle SAA′ : $AA' = A$, $SA' = B$, $SA = C$, on a

$$xy = (p - B)(p - C) = \frac{S^2}{p(p - A)} = pr\,\frac{r}{p - A} = pr\,\mathrm{tg}\,\alpha;$$

donc
$$3V = \pi r\sqrt{r\,\mathrm{tg}\,\alpha}.\sqrt{p^3}.$$

Le volume est minimum, quand p est minimum, c'est-à-dire quand le triangle SAA′ est équilatéral; alors $\alpha = 30^\circ$, $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $p = 3r\sqrt{3}$ et par suite, le volume minimum a pour expression $3\pi r^3$.

Étant donné l'ellipsoïde à trois axes inégaux (a, b, c), à un cône circonscrit à cet ellipsoïde correspond un cône circonscrit à la sphère de rayon 1, et le rapport des deux volumes est constant et égal à abc; on en conclut que le minimum du volume du cône circonscrit à l'ellipsoïde est égal à

$$3\pi . abc.$$

---

111. — *Si les côtés* a, b, c *d'un triangle* ABC *sont des nombres entiers et que* R, r, r_a, r_b, r_c, p, S *désignent respectivement le rayon du cercle circonscrit, les rayons du cercle inscrit et des cercles exinscrits, le demi-périmètre et la surface du triangle, chacune des expressions*

$$S^2(4R^2 + 20Rr - 2r^2 - p^2) - r^3(4R + r)^3$$

et
$$S^2[4R^2 - 20Rr_a - 2r_a^2 - (p - a)^2] + r_a^3(4R - r_a)^3$$

est nulle ou égale à un carré parfait.

En substituant à S, R, etc. leurs valeurs en fonction des côtés, on arrive à voir que ces deux expressions sont respectivement identiques à

$$\frac{1}{4}(b - c)^2(c - a)^2(a - b)^2 \qquad \text{et à} \qquad \frac{1}{4}(b - c)^2(a + c)^2(a + b)^2,$$

ce qui démontre la question; le calcul étant fort long, je crois devoir donner une méthode indirecte mais courte.

Je remarque que l'équation

$$X^3 - 2pX^2 + (p^2 + r\delta)X - 4RS = 0, \qquad (1)$$

où j'ai posé $\delta = 4R + r$, a pour racines les trois côtés du triangle ABC, car l'on a

$$a + b + c = 2p; \qquad p^2 + r\delta = bc + ca + ab; \qquad 4RS = abc.$$

Le dernier terme de l'équation aux carrés des différences de l'équation (1) est

$$-4[S^2(4R^2 + 20Rr - 2r^2 - p^2) - r^3\delta^3];$$

mais puisque les racines de cette équation sont a, b, c, le dernier terme de cette équation aux carrés des différences est évidemment aussi

$$-(b - c)^2(c - a)^2(a - b)^2,$$

d'où résulte ce qui était à démontrer.

La seconde partie se démontrerait d'une façon tout à fait analogue en partant de l'équation

$$X^3 + 2(p - a)X^2 + [(p - a)^2 - r_a\delta_a]X - 4RS = 0.$$

où j'ai posé $\delta_a = 4R - r_a$ et qui a pour racines $a, -b, -c$;
mais cette seconde partie se déduit immédiatement de la première en appliquant le théorème général suivant :

Si l'on a une identité entre les éléments d'un triangle, on en déduira immédiatement une autre identité en changeant dans la première respectivement a, b, c, A, B, C, S *en* a, − b, − c, − A, 180 − B, 180 − C, − S.

Remarquons à propos de ce théorème général que la seconde identité peut n'être, quelquefois, que la reproduction de la première : c'est ce qui arrive par exemple pour les formules

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A; \qquad \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}, \text{ etc.}$$

Nous avons vu que l'on a l'identité

$$S^2(4R^2 + 20Rr - 2r^2 - p^2) - r^3\delta^3 = \frac{1}{4}(b-c)^2(c-a)^2(a-b)^2;$$

et nous savons que $R = \frac{abc}{4S}; \quad p = \frac{a+b+c}{2}; \quad r = \frac{p}{S}.$

Si nous faisons dans l'identité le changement que nous venons d'indiquer, R, p, r, δ deviennent respectivement

$$-R, \quad -(p-a), \quad r_a, \quad -\delta_a,$$

et l'on a

$$S^2[4R^2 - 20Rr_a - 2r_a^2 - (p-a)^2] + r_a^3\delta_a^3 = \frac{1}{4}(b-c)^2(a+b)^2(a+c)^2,$$

ce qui était à démontrer.

Nous signalons le théorème sur lequel nous venons de nous appuyer comme utile, fécond et souvent très suggestif; ainsi, par exemple, les identités :

$$a(p-a)^2 + b(p-b)^2 + c(p-c)^2 = 2S(2R - r),$$
$$a^3 + b^3 + c^3 = 2p[p^2 + 6Rr - 3r\delta],$$
$$a^2(p-a)^3 + b^2(p-b)^3 + c^2(p-c)^3 = 4pr^2\delta(R - r),$$
$$\frac{a}{r_a} + \frac{b}{r_b} + \frac{c}{r_c} = \frac{2\delta}{p},$$
$$a \operatorname{cotg} A + b \operatorname{cotg} B + c \operatorname{cotg} C = 2(R + r),$$

etc., etc.
donnent respectivement par ce changement :

$$ap^2 - b(p-c)^2 - c(p-b)^2 = 2S(2R + r_a),$$
$$a^3 - b^3 - c^3 = 2(p-a)[-(p-a)^2 - 3r_a\delta_a + 6Rr_a],$$
$$a^2p^3 - b^2(p-c)^3 - c^2(p-b)^3 = 4(p-a)r_a^2\delta_a(R + r_a),$$
$$\frac{a}{r} + \frac{b}{r_c} + \frac{c}{r_b} = \frac{2\delta_a}{p-a},$$
$$-a \operatorname{cotg} A + b \operatorname{cotg} B + c \operatorname{cotg} C = 2(r_a - R),$$

etc., etc.
identités qu'il n'eût pas été commode de deviner, ni si simple d'établir autrement.

Nous engageons les lecteurs à chercher la démonstration de ce théorème.

E. Lemoine.

112. — *En conservant les mêmes notations, démontrer que*

$$\Sigma a^2(a-b)(a-c)(a+b-2c)(a+c-2b) = 16S^2(R-2r)^2,$$

et que si dans le premier membre développé, on change b *en* $-$ b, c *en* $-$ c, *on trouve pour résultat* $16S^2(R+2r_a)^2$.

Posant $b-c=\lambda$, $c-a=\mu$, $a-b=\nu$, et appelant I le premier membre de l'équation à démontrer, on a successivement :

$$\begin{aligned} I &= -\Sigma a^2\mu\nu(\lambda-\nu)(\mu-\lambda) = -\Sigma a^2\mu\nu(\lambda\mu-\lambda^2-\mu\nu+\nu\lambda) \\ &= -\lambda\mu\nu\Sigma a^2(\mu-\lambda+\nu)+\Sigma a^2\mu^2\nu^2 \\ &= 2\lambda\mu\nu\Sigma a^2\lambda+\Sigma a^2\mu^2\nu^2. \end{aligned}$$

Mais $\Sigma a^2\lambda = \Sigma a^2(b-c) = -(b-c)(c-a)(a-b)$;

on a donc $I = -2(b-c)^2(c-a)^2(a-b)^2+\Sigma a^2(a-b)^2(a-c)^2$.

Cherchons la valeur de $\Sigma a^2(a-b)^2(a-c)^2$;

pour cela calculons d'abord $\Sigma a(a-b)(a-c)$, qui peut s'écrire successivement

$$\Sigma a^3-\Sigma a^2(b+c)+3abc,$$

$$\Sigma a^3-\Sigma a^2(b+c+a-a)+12RS,$$

$$2\Sigma a^3-2p\Sigma a^2+12Rpr;$$

mais il est facile d'établir que $\Sigma a^2 = 2[p^2-r(4R+r)]$,

$$\Sigma a^3 = 2p[p^2-6Rr-3r^2];$$

donc enfin $\Sigma a(a-b)(a-c) = 4S(R-2r)$.

Cela fait, élevons au carré les deux membres de cette identité; il vient

$$[a(a-b)(a-c)+b(b-c)(b-a)+c(c-a)(c-b)]^2 = \Sigma a^2(a-b)^2(a-c)^2+2(b-c)(c-a)(a-b)\Sigma bc(b-c);$$

mais $\Sigma bc(b-c) = -(b-c)(c-a)(a-b)$;

donc $\Sigma a^2(a-b)^2(a-c)^2 = 16S^2(R-2r)^2+2(b-c)^2(c-a)^2(a-b)^2$.

Substituant dans la dernière valeur de I, on a

$$I = 16S^2(R-2r)^2.$$

Appliquons maintenant le théorème général que nous avons énoncé dans la précédente question, c'est-à-dire que dans l'identité

$$\Sigma a^2(a-b)(a-c)(a+b-2c)(a+c-2b) = 16S^2(R-2r)^2$$

nous allons remplacer a, b, c, S, R, r, etc., respectivement par a, $-b$, $-c$, $-S$, $-R$, r_a, etc; on aura

$$\begin{aligned} &a^2(a+b)(a+c)(a-b+2c)(a-c+2b)+b^2(b-c)(b+a)(b+c+2a)(b-a-2c) \\ &+c^2(b-c)(c+a)(-c+a+2b)(+c+b+2a) = 16S^2(R+2r_a)^2. \end{aligned}$$

C. Q. F. D.

Cette expression n'est pas symétrique et il ne serait pas aisé de la démontrer directement autrement que par une interminable vérification; on pourrait encore suivre *pas à pas* notre précédente démonstration après avoir pris les notations

$$\lambda = -b+c, \qquad \mu = -c-a, \qquad \nu = a+b;$$

mais l'on n'aurait aucune raison de les choisir si l'on n'était pas guidé par notre théorème sur le changement de a, b, c, etc., en a, $-b$, $-c$, etc.

L'emploi des formules symétriques que nous avons données en grand nombre dans notre mémoire présenté au Congrès de Limoges (1890) de l'*Association française pour l'avancement des sciences*, nous

paraît si utile dans la démonstration de beaucoup de formules qui paraissent au premier abord d'une extrême complication, que nous croyons intéressant aussi avec leur aide, d'*indiquer* une autre démonstration.

On a : $I = \Sigma a^2(a-b)(a-c)(2p-3b)(2p-3c)$

$$= \Sigma a^2(a-b)(a-c)[4p^2 - 6p(b+c) + 9bc]$$

$$= 4p^2\Sigma a^2(a-b)(a-c) - 6p\Sigma a^2(a-b)(a-c)(b+c) + 9abc\Sigma a(a-b)(a-c)$$

$$= 4p^2\Sigma a^2(a-b)(a-c) - 6p\Sigma a^2(a-b)(a-c)(2p-a) + 36Rrp\Sigma a(a-b)(a-c)$$

$$= 6p\Sigma a^3(a-b)(a-c) - 8p^2\Sigma a^2(a-b)(a-c) + 36Rrp\Sigma a(a-b)(a-c).$$

Nous avons déjà vu que $\Sigma a(a-b)(a-c) = 4S(R-2r)$;

on trouvera de même $\Sigma a^2(a-b)(a-c) = 4r^2(\delta^2 - 3p^2)$,

— — $\Sigma a^3(a-b)(a-c) = 16Sr[(R+r)\delta - p^2]$;

en substituant ces valeurs, il vient

$$I = 16S^2(R-2r)^2.$$

E. Lemoine.

---

113. — *Soit* d *le point où le cercle des neuf points du triangle* ABC *touche le cercle inscrit,* d′ *le point où la tangente menée par* d *au cercle inscrit touche l'ellipse inscrite au triangle et dont le centre est le centre de gravité du triangle (ellipse inscrite de Steiner). Démontrer que l'on a*

$$dd' = -\frac{1}{2}\,\frac{(b-c)(c-a)(a-b)}{a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab} = -\frac{(b-c)(c-a)(a-b)}{2(p^2-3r\delta)}.$$

(δ désignant $4R+r$*) et que si* $2a = b+c$, *cette tangente est parallèle à* BC, *distante de* A *du tiers de la hauteur partant de* A *et alors* $dd' = \frac{1}{6}(c-b)$.

On sait (voir par exemple *Nouv. Ann. de Math.*, 1886, p. 122) que les distances de d aux trois côtés BC, CA, AB sont proportionnelles respectivement à

$$(p-a)\frac{(b-c)^2}{a}, \qquad (p-b)\frac{(c-a)^2}{b}, \qquad (p-c)\frac{(a-b)^2}{c}$$

et que (voir *Journ. de Math. élém.* de M. de Longchamps, 1886, p. 194) les distances de d' à ces trois mêmes côtés sont proportionnelles à

$$\frac{(b-c)^2}{a}, \qquad \frac{(c-a)^2}{b}, \qquad \frac{(a-b)^2}{c}.$$

On en déduit facilement que les vraies distances de d et de d' aux trois côtés sont :

pour d : $$(p-a)\frac{(b-c)^2}{a}\cdot\frac{1}{2(R-2r)}, \text{ etc.}$$

pour d' : $$\frac{(b-c)^2}{a}\cdot\frac{S}{p^2-3r\delta}, \text{ etc.,}$$

après avoir démontré que $$2(R-2r) = \frac{1}{2S}\Sigma(p-a)(b-c)^2,$$

$$p^2 - 3r\delta = \frac{1}{2}\Sigma(b-c)^2.$$

Cela posé, on sait (voir par exemple le *Journ. de Math. élém.*, 1889, p. 150) que si l, m, n; l', m', n' sont les distances de deux points d et d' aux trois côtés BC, CA, AB d'un triangle ABC, on a

$$\overline{dd'}^2 = -\frac{R}{S}\Sigma a(m'-m)(n'-n).$$

On trouve alors au moyen des valeurs précédentes

$$l'-l = \frac{(b-c)(c-a)(a-b)}{4(p^2-3rd)(R-2r)}\cdot\frac{b-c}{a}\ (b+c-2a)$$

et les valeurs analogues pour $m'-m$, $n'-n$, d'où

$$\overline{dd'}^2 = \frac{(b-c)^2(c-a)^2(a-b)^2}{64S^2(p^2-3r\delta)(R-2r)^2}\Sigma a^2(a-b)(a-c)(a+c-2b)(a+b-2c).$$

Nous venons de voir que la quantité sous le signe Σ est $16S^2(R-2r)^2$; on a donc enfin

$$\overline{dd'}^2 = \frac{(b-c)^2(c-a)^2(a-b)^2}{4(p^2-3r\delta)^2},$$

ou, extrayant la racine et supposant $a > b > c$,

$$dd' = -\frac{(b-c)(c-a)(a-b)}{2(p^2-3r\delta)},$$

que nous pouvons mettre sous la forme $\dfrac{\lambda.\mu.\nu}{\lambda^2+\mu^2+\nu^2}$,

si l'on appelle λ, μ, ν les valeurs *absolues* des différences des côtés.

Dans le cas où l'on a $2a = b + c$ (nous ne faisons plus l'hypothèse $a > b > c$), le numérateur de $\overline{dd'}^2$ devient $\dfrac{(b-c)^6}{16}$; le dénominateur, $\dfrac{9(b-c)^4}{4}$; donc

$$dd' = \pm\frac{1}{6}(b-c).$$

Mais on a alors $l - l' = 0$, donc dd' est parallèle à BC ;

on trouve
$$l = \frac{1}{6}\sqrt{3(3b-c)(3c-b)},$$

et si l'on appelle h_a la hauteur partant de A,

$$h_a = \frac{1}{4}\sqrt{3(3b-c)(3c-b)};$$

donc
$$l = \frac{2}{3}h_a.$$

Remarque. — Si l'on appelle d_a le point où le cercle exinscrit tangent au côté BC et au prolongement des deux autres touche le cercle de Feuerbach, et d'_a le point où la tangente menée en d_a à ce cercle exinscrit touche l'ellipse maxima inscrite, on aura

$$d_a d'_a = \frac{(b-c)(c+a)(a+b)}{2[(p-a)^2+3r_a\delta_a]}.$$

On a du reste

$$2[(p-a)^2+3r_a\delta_a] = (b-c)^2+(c+a)^2+(a+b)^2 = 2[a^2+b^2+c^2+ab+ac-bc].$$

E. Lemoine.

QUESTIONS PROPOSÉES

127. — Prouver que la condition nécessaire et suffisante pour que la forme biquadratique

$$f(x, y) \equiv A_0x^4 + 4A_1x^3y + 6A_2x^2y^2 + 4A_3xy^3 + A_4y^4$$

soit la somme des quatrièmes puissances de deux formes linéaires, est la suivante :

$$\begin{vmatrix} A_0 & A_1 & A_2 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ A_2 & A_3 & A_4 \end{vmatrix} = 0.$$

C'est aussi la condition pour que le faisceau $f(x, y) = 0$ soit harmonique. Montrer directement que les deux questions se ramènent l'une à l'autre.

128. — On considère le cercle Γ inscrit et le cercle C circonscrit à un triangle; il existe une infinité d'autres triangles T inscrits dans le cercle C et circonscrits au cercle Γ; trouver le lieu du centre et l'enveloppe du cercle autopolaire par rapport à un triangle T; montrer que ce cercle est vu de deux points fixes sous des angles constants.

(A. Durand.)

129. — On considère deux cercles C, C′ tels qu'il existe un quadrilatère inscrit à l'un et circonscrit à l'autre; trouver le lieu du centre de l'hyperbole équilatère circonscrite à l'un des quadrilatères inscrit à l'un des cercles et circonscrit à l'autre.

On donne une conique S, un point fixe O sur cette courbe, et l'on trace des circonférences tangentes en O à la conique S.

1° Trouver le lieu géométrique des points de rencontre des tangentes communes à la conique et à chacune des circonférences.

2° Montrer que ce lieu se décompose en un système de droites et une conique S_1 homofocale à la proposée; discuter et construire la conique S_1. A quelle condition peut-on faire passer une circonférence par tous les points communs aux deux courbes S et S_1?

(Certificat d'aptitude à l'enseignement spécial, 1891, 2e session.)

On donne une surface gauche de révolution dont l'axe OZ est vertical et situé à 90mm en avant du plan vertical de projection; le collier, dont le rayon égale 20mm, a pour cote 100mm; les génératrices font un angle de 50° avec le plan horizontal :

1° On prend sur cette surface un point M, situé *au-dessous* du collier et dont l'éloignement est de 115mm, la ligne de rappel *mm′* étant placée à 9mm à droite du point O. Construire le plan P tangent en M à l'hyperboloïde, et la sphère S qui a son centre sur l'axe OZ et est tangente en M au plan P.

2° Tracer les contours apparents d'un cône circonscrit à cette sphère suivant le petit cercle dont le plan, perpendiculaire au plan vertical, passe par le point M et par le point le plus haut de la sphère.

Expliquer de quelle nature est l'intersection de ce cône et de l'hyperboloïde et quelle particularité présente la projection verticale de cette intersection.

(L'hyperboloïde est limité au plan du collier, et la sphère est supposée transparente. — Tracer la ligne de terre parallèle aux petits côtés de la feuille.)

(Id.)

Le Rédacteur-Gérant : H. VUIBERT.

PARIS — IMP. CHAIX. — 26738 12-91.

2e Année. N° 4. Janvier 1892.

REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

NOTE SUR LA FORMULE DE TAYLOR

M. G. Teixeira a fait connaître une formule intéressante (voir *Nouvelles Annales*, t. V, 3e série, et *Curso de Analyse infinitesimal*, 2e édition, p. 230), dont la démonstration n'offre aucune difficulté et qui comprend comme cas particulier la formule de Taylor. Nous croyions être utile à nos lecteurs en leur faisant connaître le théorème de M. Teixeira. Voici l'énoncé :

Soient f(x), F(x) *deux fonctions ayant des dérivées* $f'(x), f''(x), \ldots f^{n+1}(x), F'(x), F''(x), \ldots F^{m+1}(x)$, *finies pour toute valeur de* x *comprise entre* a *et* a + h; *on a*

$$\frac{f(a+h) - f(a) - hf'(a) - \frac{h^2}{2!}f''(a) - \ldots - \frac{h^l}{l!}f^l(a)}{F(a+h) - F(a) - hF'(a) - \frac{h^2}{2!}F''(a) - \ldots - \frac{h^k}{k!}F^k(a)} = \frac{\frac{h^{l+1}}{(l+1)!}f^{l+1}(a) + \ldots + \frac{h^n}{n!}f^n(a) + R_n}{\frac{h^{k+1}}{(k+1)!}f^{k+1}(a) + \ldots + \frac{h^m}{m!}F^m(a) + R'_m}, \quad (1)$$

où

$$R_n = \frac{h^{n+1}(1-\theta)^n f^{n+1}(a+\theta h)}{n!}; \qquad R'_m = \frac{h^{m+1}(1-\theta)^m F^{m+1}(a+\theta h)}{m!}, \qquad 0 < \theta < 1,$$

en supposant que le dénominateur du second membre de la formule (1) *soit différent de zéro pour toutes les valeurs de* θ *comprises entre* 0 *et* 1.

Pour établir cette proposition, posons

$$a + h = b,$$

$$\varphi(z) = f(z) + (b-z)f'(z) + \frac{(b-z)^2}{2!}f''(z) + \ldots + \frac{(b-z)^n}{n!}f^n(z),$$

$$\varphi_1(z) = f(z) + (b-z)f'(z) + \frac{(b-z)^2}{2!}f''(z) + \ldots + \frac{(b-z)^l}{l!}f^l(z),$$

et pareillement :

$$\Phi(z) = F(z) + (b-z)F'(z) + \frac{(b-z)^2}{2!}F''(z) + \ldots + \frac{(b-z)^m}{m!}F^m(z),$$

$$\Phi_1(z) = F(z) + (b-z)F'(z) + \frac{(b-z)^2}{2!}F''(z) + \ldots + \frac{(b-z)^k}{k!}F^k(z),$$

en supposant $n \geqslant l, \quad m \geqslant k.$

Désignons par P le premier membre de la formule (1); on a évidemment

$$P = \frac{\varphi(b) - \varphi_1(a)}{\Phi(b) - \Phi_1(a)}. \quad (2)$$

Considérons la fonction $\psi(z) = \varphi(z) - \varphi_1(a) - P[\Phi(z) - \Phi_1(a)]$

et appliquons-lui la formule des accroissements finis

$$\psi(b) = \psi(a) + \frac{h\psi'(a+\theta h)}{p(1-\theta)^{p-1}}, \quad (3)$$

dans laquelle θ désigne un nombre compris entre 0 et 1, et p un nombre positif arbitraire. (Nous établirons cette formule plus loin.)

Remarquons que $\psi(b) = 0$, en vertu de l'identité (2); ensuite, on trouve aisément

$$\varphi'(z) = \frac{(b-z)^n}{n!} f^{n+1}(z), \qquad \Phi'(z) = \frac{(b-z)^m}{m!} F^{m+1}(z);$$

en outre, si $z = a + \theta h$, on a $b - z = h(1-\theta)$; donc la formule (3) donne immédiatement

$$0 = \frac{h^{l+1}}{(l+1)!} f^{l+1}(a) + \ldots + \frac{h^n}{n!} f^n(a) - P\left[\frac{h^{k+1}}{(k+1)!} F^{k+1}(a) + \ldots + \frac{h^m}{m!} F^m(a)\right]$$
$$+ \frac{1}{p}\left[\frac{h^{n+1}(1-\theta)^{n+1-p}}{n!} f^{n+1}(a+\theta h) - P.\frac{h^{m+1}(1-\theta)^{m+1-p}}{m!} F^{m+1}(a+\theta h)\right],$$

d'où l'on tire
$$P = \frac{\dfrac{h^{l+1}}{(l+1)!} f^{l+1}(a) + \ldots + \dfrac{h^n}{n!} f^n(a) + \dfrac{h^{n+1}(1-\theta)^{n+1-p} f^{n-1}(a+\theta h)}{p.n!}}{\dfrac{h^{k+1}}{(k+1)!} F^{k+1}(a) + \ldots + \dfrac{h^m}{m!} F^m(a) + \dfrac{h^{m+1}(1-\theta)^{m+1-p} F^{m+1}(a+\theta h)}{p.m!}}.$$

Cette formule est légitime, on s'en assure aisément, si les deux termes de la fraction précédente ne s'annulent pas tous deux pour aucune valeur de θ comprise entre 0 et 1. En supposant $p = 1$, on obtient la formule de M. Teixeira.

Examinons enfin le cas ou l'on aurait $n = l$, $m = k$; ce qui revient à supposer $\varphi_1(z) \equiv \varphi(z)$ et $\Phi_1(z) \equiv \Phi(z)$; alors $\psi(b) = 0$, $\psi(a) = 0$ et par suite pour une valeur de z comprise entre a et b, soit $z = a + \theta h$, on a $\psi'(a + \theta h) = 0$; de sorte que

$$P = \frac{R_n}{R'_m}$$

ou
$$\frac{f(a+h) - f(a) - \frac{h}{1} f'(a) - \frac{h^2}{2!} f''(a) - \ldots - \frac{h^n}{n!} f^n(a)}{F(a+h) - F(a) - \frac{h}{1} F'(a) - \frac{h^2}{2!} F''(a) - \ldots - \frac{h^m}{m!} F^m(a)} = \frac{R_n}{R'_m} = \frac{m!}{n!} h^{n-m}(1-\theta)^{n-m} \frac{f^{n+1}(a+\theta h)}{F^{m+1}(a+\theta h)};$$

c'est la formule donnée par M. E. Roche (*Comptes rendus de l'Académie des sciences*, février 1864).

En particulier, si l'on pose $F(x) = -(b-x)^p$ et $m = 0$, la formule précédente devient, en remplaçant 0! par 1, et $F'(a + \theta h)$ par $ph^{p-1}(1-\theta)^{p-1}$:

$$\frac{f(a+h) - f(a) - \frac{h}{1} f'(a) - \ldots - \frac{h^n}{n!} f^n(a)}{h^p} = \frac{h^n(1-\theta)^n f^{n+1}(a+\theta h)}{n!p.h^{p-1}(1-\theta)^{p-1}},$$

c'est-à-dire
$$f(a+h) - f(a) - \frac{h}{1} f'(a) - \ldots - \frac{h^n}{n!} f^n(a) = \frac{h_{n+1}(1-\theta)^{n+1-p} f^{n+1}(a+\theta h)}{p.n!};$$

c'est la formule de Taylor. Au surplus on obtient très simplement la formule de Taylor en appliquant l'identité (3) à la fonction

$$\psi(z) = f(z) + (b-z)f'(z) + \frac{(b-z)^2}{2!} f''(z) + \ldots + \frac{(b-z)^n}{n!} f^n(z),$$

et la démonstration sera valable si la fonction $f(x)$ admet des dérivées $f'(x)$, $f''(x)$ ... $f^{n+1}(x)$ finies dans l'intervalle de a à b.

Il nous reste à établir la formule (3). Or, si dans la formule

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{\varphi(a+h) - \varphi(a)} = \frac{f'(a+\theta h)}{\varphi'(a+\theta h)} \qquad 0 < \theta < 1, \qquad a + h = b$$

on pose $\varphi(x) = -(b-x)^p$, p désignant un nombre positif arbitraire,

on a $\varphi(a+h) = 0$, $\varphi(a) = -h^p$, $\varphi'(x) = p(b-x)^{p-1}$;

donc
$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h^p} = \frac{f'(a+\theta h)}{ph^{p-1}(1-\theta)^{p-1}},$$
c'est-à-dire
$$f(a+h)-f(a) = \frac{hf'(a+\theta h)}{p.(1-\theta)^{p-1}}.$$

En remplaçant $f(x)$ par $\psi(x)$ on a bien la formule (3).

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

74. — *Construire la courbe représentée en coordonnées polaires par l'equation* $\omega = \rho(\rho+1)(\rho+2)$.

(École des Mines de Saint-Étienne, concours supplémentaire de 1890.)

Faisons varier ρ de $-\infty$ à $+\infty$ et étudions la variation correspondante de ω. Prenant la dérivée, on a
$$\omega'_\rho = 3\rho^2 + 6\rho + 2,$$
dont les racines sont $-1 \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$. On a donc le tableau de variation suivant :

ρ	$-\infty$		-2		$-1-\frac{1}{\sqrt{3}}$		-1		$-1+\frac{1}{\sqrt{3}}$		0		$+\infty$
ω'		$+$		$+$		$-$		$-$		$+$		$+$	
ω	$-\infty$	croît	0	croît	$\frac{2}{3\sqrt{3}}$	décroît	0	décroît	$-\frac{2}{3\sqrt{3}}$	croît	0	croît	$+\infty$

On peut avoir la tangente en un point quelconque, à l'aide de la formule
$$\operatorname{tg} V = \frac{\rho}{\rho'_\omega} = \rho\omega'_\rho,$$
ce qui nous montre que la courbe est tangente aux droites $\omega = \pm\frac{2}{3\sqrt{3}}$.

E. Bourrienne, à Rouen.

Construction analogue par M. Husson, élève au lycée de Nancy.

81. — *Trouver le lieu des centres des hyperboles ayant leurs asymptotes parallèles aux axes coordonnés, passant par l'origine et tangentes à la parabole définie par l'équation*
$$Y = X^2 + 1. \qquad (1)$$

Soient α, β les coordonnées du centre d'une hyperbole satisfaisant aux conditions données; l'équation de cette hyperbole sera
$$XY - \beta X - \alpha Y = 0. \qquad (2)$$

Posons $X = x$, $Y = 1 + y$. Les équations (1) et (2) deviennent

$$y = x^2, \qquad (1)'$$

$$xy + x(1 - \beta) - \alpha y - \alpha = 0. \qquad (2)'$$

L'équation aux abscisses des points d'intersection de ces deux courbes est

$$x^3 - \alpha x^2 + x(1 - \beta) - \alpha = 0. \qquad (3)$$

Faisons disparaître le terme en x^2 en remplaçant x par $x + \frac{\alpha}{3}$; on obtient

$$x^3 + x\left(1 - \beta - \frac{\alpha^2}{3}\right) - \frac{2\alpha^3}{27} + \frac{\alpha}{3}(1 - \beta) - \alpha = 0.$$

En exprimant que cette équation a une racine double et en posant $\beta = 1 + y$, $\alpha = x$, on obtient l'équation du lieu. Après quelques simplifications, on trouve

$$4x^4 - x^2(y^2 - 18y - 27) - 4y^3 = 0. \qquad (4)$$

Résolvons par rapport à x^2 :

$$8x^2 = y^2 - 18y - 27 \pm \sqrt{(y^2 - 18y - 27)^2 + 64y^3}.$$

Si l'on cherche les points doubles de la courbe représentée par l'équation (4), on obtient pour les coordonnées de ces points

$$x = 0, \quad y = 0 \qquad \text{et} \qquad x^2 = 27, \quad y = -9.$$

Or on reconnaît que $\quad (y^2 - 18y - 27)^2 + 64y^3 \equiv (y + 9)^3 (y + 1),$

de sorte que $\quad 8x^2 = y^2 - 18y - 27 \pm (y + 9)\sqrt{(y + 1)(y + 9)}. \qquad (5)$

Pour que x^2 soit réel, il faut que y vérifie l'une ou l'autre des inégalités

$$y < -9 \quad \text{ou} \quad y > -1.$$

Si l'on suppose $y > 0$, x^2 est réel; le produit des racines de l'équation (4), bicarrée en x, est négatif; par suite, à toute valeur positive de y correspondent deux valeurs de x réelles, égales et de signes contraires.

Si y est négatif, le produit des valeurs de x^2 est positif; la somme sera positive si l'on a

$$y^2 - 18y - 27 > 0$$

ou

$$(y - y')(y - y'') > 0,$$

en posant $\quad y' = 9 - 6\sqrt{3}, \qquad y'' = 9 + 6\sqrt{3}.$

On doit donc supposer $\quad y < 9 - 6\sqrt{3} < -1.$

Par suite si y est < 0, pour que x^2 soit réel, on doit supposer $y < -9$. A chaque valeur de y inférieure à -9 correspondent quatre valeurs réelles de x, deux à deux égales et de signes contraires.

Il résulte de cette discussion que la courbe n'a aucun point entre la parallèle à l'axe des x ayant pour équation $y = -9$ et l'axe des x (il s'agit, bien entendu, des nouvelles coordonnées).

L'équation (4) montre que la courbe a pour asymptotes les droites représentées par les équations

$$y = 2x + 1, \qquad y = -2x + 1.$$

De plus, l'axe des y est une direction asymptotique avec branches paraboliques du côté des y négatifs.

L'asymptote représentée par la première des deux équations précédentes, coupe la courbe aux points ayant pour abscisses

$$-3 \pm 2\sqrt{2}.$$

La seconde asymptote la coupe aux points ayant pour abscisses

$$3 \mp 2\sqrt{2}.$$

L'origine est un point de rebroussement, la tangente étant l'axe des y, puisque l'ensemble des termes du degré le plus bas se réduit à $27x^2$.

Il est facile, d'après cela, de construire la courbe du côté des y positifs.

Occupons-nous maintenant des branches situées du côté des y négatifs par rapport à la droite ayant pour équation $y = -9$.

Pour cela, remarquons que cette droite coupe la courbe aux points donnés par l'équation (5)

$$8x^2 = 9^2 + 18.9 - 27 = 8.27$$

ou

$$x^2 = 27.$$

Transportons l'origine au point de coordonnées $x = +\sqrt{27}$, $y = -9$.

Pour cela, dans l'équation (5) posons

$$x = \sqrt{27} + X, \qquad y = -9 + Y.$$

Il vient

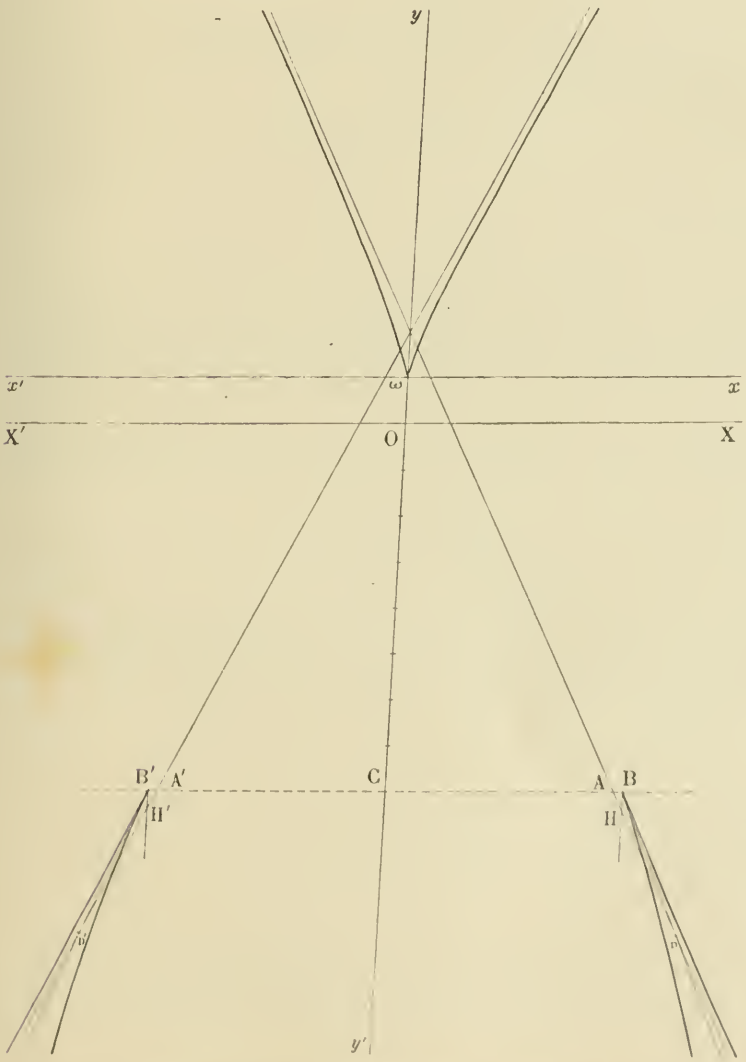
$$8(X^2 + 2X\sqrt{27} + 27) = Y^2 - 36Y + 8.27 \pm Y\sqrt{Y(Y-8)}$$

ou

$$(8X^2 + 16X\sqrt{27} + 36Y - Y^2)^2 = Y^3(Y-8)$$

ou, en développant,

$$(16X\sqrt{27} + 36Y)^2 + \ldots = 0.$$



La courbe présente donc un point de rebroussement à la nouvelle origine B, la tangente en ce point ayant pour équation

$$4X\sqrt{27} + 9Y = 0$$

ou

$$4X\sqrt{3} + 3Y = 0.$$

La valeur absolue du coefficient angulaire $\frac{-4\sqrt{3}}{3}$ est plus grande que 2. L'asymptote définie par l'équation $y = -2x + 1$ est coupée par la parallèle à l'axe des x $y = -9$, au point A dont l'abscisse est égale à $+5$. On a $CA < CB$. Le point d'intersection de la courbe et de l'asymptote considérée a pour abscisse $3 + 2\sqrt{2}$, valeur supérieure à $\sqrt{27}$. Soit BD la tangente en B. L'équation de cette tangente, rapportée aux axes ωx, ωy, est

$$y + 9 = -\frac{4\sqrt{3}}{3}\left(x - \sqrt{27}\right);$$

elle coupe l'asymptote en un point D ayant pour abscisse $3 + 2\sqrt{3}$; le point d'intersection de la courbe et de l'asymptote est donc entre H et D, H étant le point de rencontre de l'asymptote avec la parallèle BB' à Oy. On peut d'après cela construire la courbe, qui a la forme représentée ci-contre.

La courbe étant du quatrième degré et ayant trois points doubles est unicursale. On peut le vérifier en disposant les calculs comme dans la solution suivante.

Seconde solution. — Soient α et β les coordonnées du centre de l'hyperbole; l'équation de cette courbe sera

$$xy - \beta x - \alpha y = 0. \qquad (1)$$

Les tangentes à ces deux courbes au point (x, y) seront les mêmes si

$$\frac{y-\beta}{2x} = \frac{x-\alpha}{-1} = \frac{\beta x + \alpha y}{y-2},$$

ou, en tenant compte des équations de ces courbes,

$$\frac{x^2+1-\beta}{2x} = \alpha - x = \frac{x(x^2+1)}{x^2-1}.$$

On a donc
$$\alpha = \frac{2x^3}{x^2-1}, \qquad \beta = -\frac{(x^2+1)^2}{x^2-1}.$$

On voit immédiatement que le lieu est une courbe unicursale du quatrième degré.

Pour étudier les variations de α et β, calculons α'_x et β'_x; on trouve

$$\alpha'_x = \frac{2x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2}, \qquad \beta'_x = -\frac{2x(x^2+1)(x^2-3)}{(x^2-1)^2}.$$

Les valeurs remarquables de x sont donc

$$x = 0, \qquad x = \pm 1, \qquad x = \pm\sqrt{3}.$$

Quand x est infiniment grand négatif, α et β sont aussi infiniment grands négatifs et on a $\frac{\alpha}{\beta} = 0$; donc, aux valeurs de x négatives et très grandes en valeur absolue, correspond une branche parabolique du lieu, ayant Oy pour direction asymptotique, et située au-dessous de l'axe des x; c'est la branche AB.

On peut trouver la parabole asymptote de cette courbe; soit $Y = aX^2 + b$ son équation; prenons $X = \alpha$, nous aurons

$$Y = a\alpha^2 + b, \qquad \text{d'où} \qquad Y - \beta = a\alpha^2 - \beta + b$$

ou
$$Y - \beta = \frac{(4a+1)x^6 + (1+b)x^4 - (2b+1)x^2 + b - 1}{(x^2-1)^2}.$$

Pour que $Y - \beta$ tende vers zéro quand x augmente indéfiniment en valeur absolue, il faut et il suffit que le numérateur de la fraction précédente soit de degré moindre que le dénominateur; d'où

$$4a + 1 = 0, \qquad b + 1 = 0;$$

et par suite

$$a = -\frac{1}{4}, \qquad b = -1;$$

l'équation cherchée est donc

$$Y = -\frac{1}{4}X^2 - 1 \qquad \text{ou} \qquad X^2 + 4(y+1) = 0.$$

On a alors $Y - \beta = \frac{x^2-2}{(x^2-1)^2}$; donc la parabole asymptote se trouve pour des points situés suffisamment loin, au-dessus de la branche que nous construisons; elle rencontre cette courbe aux points correspondants à $x = \pm\sqrt{2}$.

Pour $x = -\sqrt{2}$, on a $\alpha = -4\sqrt{2}$, $\beta = -9$.

Quand x varie de $-\infty$ à $-\sqrt{3}$, α' et β' sont positifs, donc α et β vont en croissant; pour $x = -\sqrt{3}$

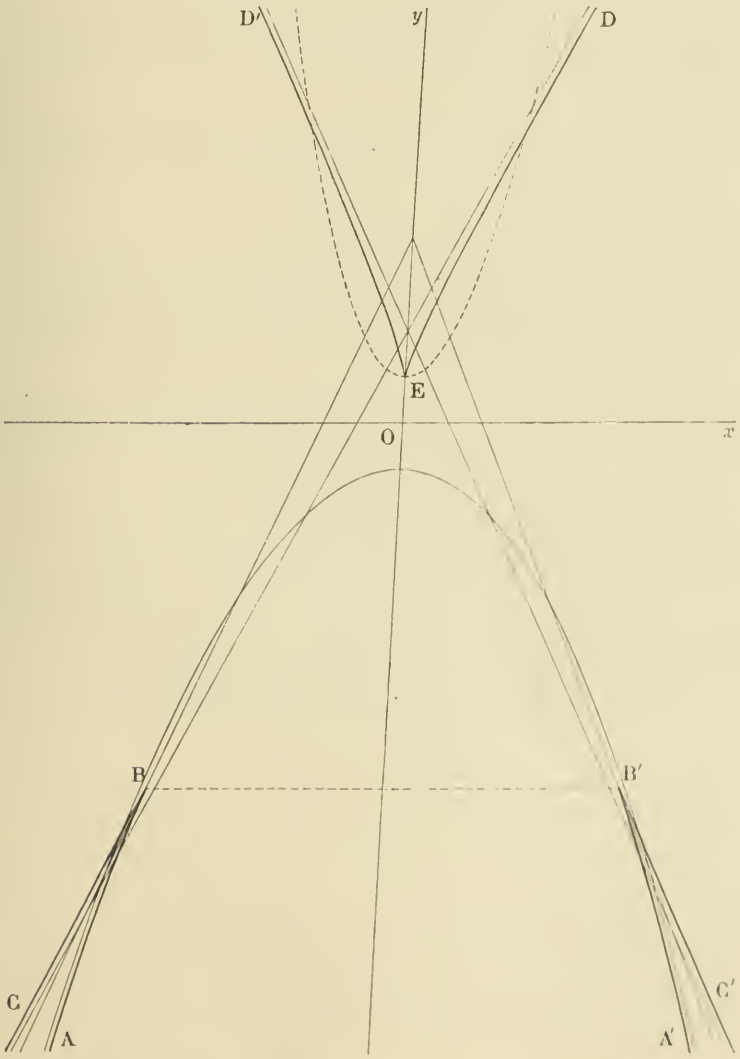
on a $\alpha = -3\sqrt{3}$, $\beta = -8$; on a le point B; en outre $\alpha' = \beta' = 0$, donc B est un point de rebroussement; le coefficient angulaire de la tangente est la valeur de $\frac{\beta'}{\alpha'}$ pour $x = -\sqrt{3}$.

Or $\frac{\beta'}{\alpha'} = -\frac{x^2+1}{x}$; pour $x = -\sqrt{3}$, on obtient $\frac{4}{\sqrt{3}}$.

La tangente en B a donc pour équation $4X - Y\sqrt{3} + 4\sqrt{3} = 0$; elle passe par le point $(0, 4)$, ce qui permet de la tracer facilement.

Quand x varie de $-\sqrt{3}$ à -1, α' et β' sont négatifs, α et β décroissent indéfiniment, on a la branche de courbe BC. D'ailleurs $\frac{\alpha}{\beta} = -\frac{2x^3}{(x^2+1)^2}$; pour $x = -1$, $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{1}{2}$.

En outre $2\alpha - \beta = \frac{4x^3 + (x^2+1)^2}{x^2-1} = \frac{x^4 + 4x^3 + 2x^2 + 1}{x^2 - 1} = \frac{x^3 + 3x^2 - x + 1}{x - 1} = -2.$



L'asympote a donc pour équation

$$Y = 2(X + 1).$$

Cherchons les points où la courbe coupe son asymptote.

Nous avons

$$2\alpha - \beta + 2 = \frac{x^3 + 3x^2 - x + 1 + 2(x-1)}{x - 1}$$

$$= \frac{x^3 + 3x^2 + x - 1}{x - 1}$$

$$= \frac{(x+1)(x^2 + 2x - 1)}{x - 1}.$$

Or $x^2 + 2x - 1$ s'annule pour $x = -1 \pm \sqrt{2}$; ces deux valeurs sont en dehors de l'intervalle $(-\sqrt{3}, -1)$; donc la branche BC reste toujours du même côté de l'asymptote. Quand x varie de -1 à 0, α' et β' sont négatifs; α et β qui étaient d'abord infiniment grands positifs, vont en décroissant; on a la branche de courbe DE; en outre $-1 \pm \sqrt{2}$ sont encore extérieurs à cet intervalle; donc cette branche ne coupe pas non plus son asymptote.

Pour $x = 0$, on a $\alpha' = \beta' = 0$; donc E est encore un point de rebroussement. On a d'ailleurs $\frac{\alpha'}{\beta'} = 0$; donc la tangente en E a pour équation $X = 0$; c'est l'axe des Y; les coordonnées de ce point sont $(0, +1)$.

Si maintenant nous changeons x en $-x$, dans les formules qui donnent α et β, α se change en

$-\alpha$, et β ne change pas. Donc nous aurons le reste de la courbe en prenant le symétrique par rapport à Oy de la partie déjà tracée.

Si on veut l'équation du lieu, on n'a qu'à éliminer x entre les équations (3) et (4); on obtient ainsi

$$\alpha^2(\beta + 8)^2 + 4[\alpha^2 + 3(\beta - 1)][3\alpha^2 - (\beta - 1)^2] = 0.$$

L. P. Randon, lycée Louis-le-Grand.

Ont envoyé des solutions exactes : MM. Faure (Valence); C. Hughon (lycée Saint-Louis) ; Ed. Husson (lycée de Nancy); Barriol Alfred.

---

82. — *1° Que représente (axes rectangulaires) l'équation*

$$x^2 + 2\lambda xy - y^2 - a(x + y) = 0, \qquad (C)$$

λ désignant un paramètre variable?

2° Lieu des points de contact des tangentes aux coniques (C), *parallèles à la bissectrice de l'angle* x'Oy.

3° Ces coniques (C) *coupent les axes de coordonnées en deux points différents de l'origine. Lieu géométrique des points de rencontre des normales en ces deux points.*

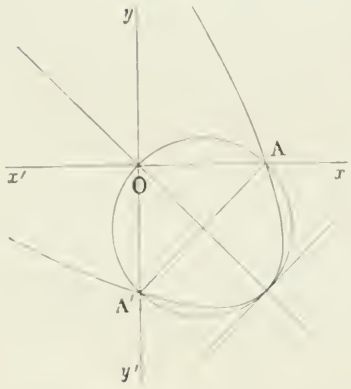
1° En égalant à zéro l'ensemble des termes du second degré de l'équation proposée, on obtient l'équation

$$x^2 + 2\lambda xy - y^2 = 0,$$

qui représente deux droites réelles et rectangulaires.

Les coniques (C) sont donc des hyperboles équilatères, quelle que soit la valeur attribuée à λ.

Toutes ces hyperboles passent par l'origine des coordonnées et ont pour tangente en ce point la droite $x + y = 0$, seconde bissectrice des angles des axes de coordonnées.



Elles coupent chacun des axes en un second point situé à la distance a de l'origine. Les coordonnées de ces points A et A' sont

$$(A)\begin{cases} x = a \\ y = 0 \end{cases} \qquad (A')\begin{cases} x = 0 \\ y = -a. \end{cases}$$

Ainsi toutes ces hyperboles sont circonscrites au triangle rectangle isocèle OAA'.

2° On peut mener à chacune de ces courbes une seconde tangente parallèle à la bissectrice de l'angle $x'Oy$, et le point de contact de cette tangente est situé sur le diamètre conjugué des cordes qui lui sont parallèles, c'est-à-dire qui ont pour coefficient angulaire -1.

L'équation de ce diamètre est

$$f'_x - f'_y = 0.$$

Or, les valeurs des dérivées partielles sont ici

$$f'_x = 2x + 2\lambda y - a,$$
$$f'_y = 2\lambda x - 2y - a.$$

L'équation du diamètre, ordonnée par rapport à λ, est donc

$$-\lambda(x - y) + x + y = 0. \qquad (1)$$

Il passe par l'origine, comme on pouvait s'y attendre. On aura l'équation du lieu des points de contact en éliminant λ entre cette équation et celle de la courbe que nous écrirons

$$2\lambda xy + (x + y)(x - y - a) = 0. \qquad (2)$$

La condition nécessaire et suffisante pour que ces deux équations soient satisfaites pour une

même valeur de λ est

$$(x + y)[2xy + (x - y)(x - y - a)] = 0,$$

équation qui se décompose en deux autres :

$$x + y = 0,$$

et

$$x^2 + y^2 - a(x - y) = 0.$$

La première de ces équations représente la seconde bissectrice des angles des axes de coordonnées. C'est une solution singulière qui correspond à la valeur zéro donnée à λ; pour cette valeur l'équation proposée représente les deux droites

$$x + y = 0 \qquad \text{et} \qquad x - y - a = 0;$$

le diamètre qui, par son intersection avec la courbe détermine un point du lieu, est représenté par

$$x + y = 0;$$

cette droite doit donc faire partie du lieu des points communs aux deux génératrices.

La seconde équation représente le cercle circonscrit au triangle OAA'. Nous aurons les coordonnées du centre et le rayon en mettant son équation sous la forme

$$\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{2} = 0.$$

On voit immédiatement que les coordonnées du centre sont $\frac{a}{2}$ et $-\frac{a}{2}$, et que le rayon a pour valeur $\frac{a}{\sqrt{2}}$. Le centre est le milieu de l'hypoténuse AA' du triangle OAA'.

Réciproquement, tout point de ce cercle fait partie du lieu demandé. Car si l'on prend arbitrairement sur ce cercle un point quelconque x_1, y_1, les deux génératrices (1) et (2) passeront par ce point pour la valeur

$$\frac{x_1 + y_1}{x_1 - y_1}$$

attribuée à λ. Cette valeur est toujours réelle, finie et déterminée, sauf lorsque $x_1 = y_1$; ces deux coordonnées sont alors nulles. L'origine est donc un point qui correspond à une valeur indéterminée de λ; cela résulte de ce que pour toute valeur de λ les deux génératrices (1) et (2) passent par l'origine.

3° Cherchons les équations des normales aux hyperboles (C) aux points A et A' dont nous avons trouvé plus haut les coordonnées; il suffit pour cela d'attribuer à x_1 et y_1 les valeurs de ces coordonnées dans l'équation

$$\frac{x - x_1}{f'_{x_1}} = \frac{y - y_1}{f'_{y_1}}.$$

Nous obtenons ainsi pour les équations de ces normales

$$2\lambda(x - a) - (x + y - a) = 0, \tag{3}$$

$$2\lambda(y + a) + (x + y + a) = 0. \tag{4}$$

L'élimination de λ conduit à l'équation du lieu :

$$(x - a)(x + y + a) + (y + a)(x + y - a) = 0,$$

c'est-à-dire

$$(x + y)^2 + a(x - y - 2a) = 0.$$

Cette équation représente une parabole dont un diamètre a pour équation $x + y = 0$, la tangente à l'extrémité de ce diamètre étant représentée par $x - y - 2a = 0$. Comme ces deux droites sont rectangulaires, ce diamètre est l'axe de la courbe. Les coordonnées du sommet sont donc

$$x = a, \qquad y = -a.$$

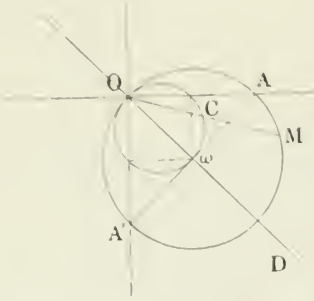
La courbe passe par les points A et A'. Elle est donc bien déterminée.

Réciproquement, tout point de cette parabole est un point du lieu : car après avoir choisi arbitrai-

rement un point x_1, y_1 sur cette courbe, on trouvera toujours une valeur de λ pour laquelle les génératrices (3) et (4) passent par le point choisi. Seulement quand ce point est A ou A′, l'une des génératrices n'est plus déterminée.

D.

Solution géométrique. — 1° L'équation représente des coniques circonscrites au quadrilatère formé par les axes d'une part, et par la droite AA′ et la bissectrice de l'angle $x'Oy$ d'autre part. Ces couples de droites étant formés de droites rectangulaires, la conique est une hyperberbole équilatère, et comme deux sommets du quadrilatère sont confondus en O, la droite OD, seconde bissectrice de l'angle des axes, est la tangente en O. Remarquons d'ailleurs que les hyperboles équilatères circonscrites au triangle rectangle OAA′ ont nécessairement pour tangente en O la perpendiculaire abaissée sur l'hypoténuse, comme on s'en assure aisément, en appliquant, par exemple, le théorème de Frégier.

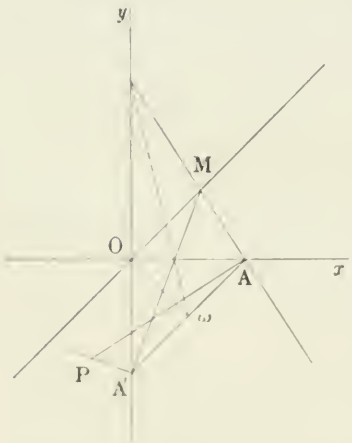


2° Le lieu des centres des hyperboles équilatères circonscrites à un triangle est le cercle des neuf points relatif à ce triangle. Soit C le centre d'une hyperbole de la famille considérée; le point de contact de la seconde tangente parallèle à OD s'obtient en prenant OM = 2OC, sur OC prolongée. Le lieu du point M est donc évidemment le cercle circonscrit au triangle OAA′. Pour la conique particulière DO, AA′ le point de contact de DO est indéterminé; DO fait partie du lieu.

3° On voit aisément que les normales en A et A′ à toutes les hyperboles considérées forment deux faisceaux homographiques, et par suite le lieu de leur point de concours est une conique passant par A et A′. Si le centre d'une hyperbole vient sur AA′ en ω, AA′ est un diamètre et par suite les normales en A et A′ sont parallèles; et comme l'hyperbole se réduit alors aux droites AA′, OD, les normales sont parallèles à OD; d'autre part AA′ est tangente au cercle des neuf points, donc ω doit être compté deux fois, et par suite OD est une direction asymptotique double; le lieu est donc une parabole passant par A et A′ et dont l'axe est parallèle à OD.

X.

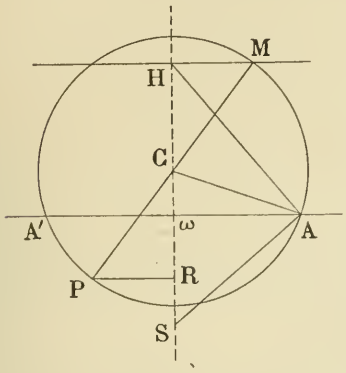
M. Barriol Alfred, résout ainsi la dernière partie du problème :



Cherchons d'abord le lieu du point de concours des tangentes en A et A′. Soient AM et A′M les tangentes en A et A′ à l'une des hyperboles. En vertu d'un théorème connu (Bobilier), les points de rencontre des tangentes aux sommets du triangle AOA′ avec les côtés opposés sont en ligne droite; la tangente en O étant la médiane Oω, il en résulte immédiatement que OM est parallèle à AA′, et par suite le lieu du point M est la bissectrice de l'angle xOy. Nous sommes ainsi ramenés à ce problème : étant donnés deux points A, A′ et une droite OM parallèle à AA′, on joint un point quelconque M de OM aux points A et A′; trouver le lieu du point de rencontre des droites AP et A′P, respectivement perpendiculaires à AM et A′M. Or il est visible que ces droites AP, A′P forment deux faisceaux harmoniques; donc P décrit une conique passant par les points A et A′, etc. On déduit de ce qui précède ce théorème : Étant donné un point P sur une parabole, on joint P aux extrémités A, A′ d'une corde principale et l'on mène AM perpendiculaire à PA, A′M perpendiculaire à PA′; le lieu du point de rencontre M de ces perpendiculaires est une corde principale.

Ont résolu la même question : MM. A. Delpierre; Bourrienne (Rouen), Faure (Valence); Ed. Husson (Nancy); E. Jacquest (Dijon); R. Lévy; H. Loiseau (Clermont-Ferrand), Peltier (Nantes), L. Perrée (Condorcet), G. A. Pouhliart (Clermont-Ferrand); L. Randon (Louis-le-Grand).

Note. — On peut modifier la solution de M. Barriol de manière à ne pas faire intervenir les faisceaux homographiques dans une question aussi simple.



Soit, d'une manière plus générale, M un point pris sur une parallèle à AA′ et soit P le point diamétralement opposé à M, dans le cercle circonscrit au triangle MAA′. Lorsque M vient au point de rencontre de la droite fixe qu'il décrit avec la perpendiculaire élevée au milieu de AA′, soit en H, le point P vient en S tel que $S\omega = \frac{\alpha^2}{h}$, en posant $\omega A = \alpha$, $\omega H = h$. Soit PR la perpendiculaire abaissée de P sur Sω; on a $PR = MH$; donc

$$\overline{PR}^2 = \overline{MC}^2 - \overline{CH}^2 = \overline{CA}^2 - \overline{CH}^2 = \alpha^2 + u^2 - (h - u)^2$$

ou

$$\overline{PR}^2 = \alpha^2 - h^2 + 2h.u,$$

en désignant ωC par u.

Or

$$SR = S\omega - R\omega = \frac{\alpha^2}{h} - (CH - u) = \frac{\alpha^2}{h} - h + 2u,$$

de sorte que

$$h.SR = \alpha^2 - h^2 + 2hu;$$

donc

$$\overline{PR}^2 = h.SR.$$

Le lieu est donc une parabole ayant le point S pour sommet, l'axe étant dirigé suivant Sω, et enfin le paramètre égal à $\frac{1}{2}h$. Dans le cas particulier que nous avons à considérer, on a $h = \alpha = \frac{a\sqrt{2}}{2}$; le paramètre a donc alors pour valeur $\frac{a\sqrt{2}}{4}$.

---

106. — *Par un point* P *on mène aux asymptotes d'une hyperbole donnée des parallèles qui coupent la courbe en* M *et* N.

1° Trouver l'équation de la droite MN. *Quelle est sa direction, et que vaut le rapport des distances du point* P *à cette droite* MN *et à la polaire de* P ?

2° Trouver le lieu géométrique du point P *tel que la droite* MN *passe par le centre de l'hyperbole.*

3° On mène du centre la perpendiculaire OH *sur* MN. *Quel est le lieu du point* H, *quand on fait varier l'angle des asymptotes en laissant fixes les sommets* A *et* A′ *de l'hyperbole?*

4° Trouver le lieu du point P *tel que la droite* MN *soit tangente à l'ellipse qui a les mêmes axes que l'hyperbole donnée, celle-ci étant invariable. Construire la courbe ainsi obtenue, tracer ses asymptotes.*

(Certificat d'aptitude à l'enseignement spécial, 1891, 1re session.)

1°. — Soient

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 =$$

l'équation de l'hyperbole, et

$$\frac{(x - \alpha)^2}{a^2} - \frac{(y - \beta)}{b^2} = 0$$

l'équation des parallèles aux asymptotes menées par le point P (α, β).

On obtient l'équation de la droite MN en retranchant ces deux équations; on trouve

$$\frac{2\alpha x}{a^2} - \frac{2\beta y}{b^2} - \frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} - 1 = 0.$$

La droite MN est donc parallèle à la polaire du point P. Menons par le point P une droite quelconque

$$x = \alpha + l\rho, \qquad y = \beta + m\rho.$$

Les valeurs de ρ correspondantes aux points de rencontre de cette droite avec la droite MN et la polaire de P sont données respectivement par les équations

$$2\rho_1 \left(\frac{\alpha l}{a^2} - \frac{\beta m}{b^2}\right) + \frac{\alpha^2}{a^2} - \frac{\beta^2}{b^2} - 1 = 0,$$

$$\rho_2 \left(\frac{\alpha l}{a^2} - \frac{\beta m}{b^2}\right) + \frac{\alpha^2}{a^2} - \frac{\beta^2}{b^2} - 1 = 0;$$

on a donc $2\rho_1 = \rho_2$, ce qui montre que le rapport des distances du point P à la droite MN et à sa polaire est égal à $\frac{1}{2}$ et de plus que ces deux droites sont d'un même côté du point P.

2° — Pour que la droite MN passe par l'origine, il faut que

$$\frac{\alpha^2}{a^2} - \frac{\beta^2}{b^2} + 1 = 0,$$

ce qui montre que le lieu du point P est alors l'hyperbole conjuguée de l'hyperbole donnée.

3° — La droite OH a pour équation

$$\frac{y}{x} = -\frac{a^2\beta}{b^2\alpha};$$

on éliminant b^2 entre cette équation et l'équation de la droite MN, on aura l'équation du lieu du point H.

On trouve ainsi
$$x^2 + y^2 - \frac{\alpha^2 + a^2}{2\alpha}x - \frac{\beta}{2}y = 0,$$

équation d'un cercle passant par l'origine et dont le centre a pour coordonnées $\frac{\alpha^2 + a^2}{4\alpha}$ et $\frac{\beta}{4}$.

4° — J'écris que les coordonnées de la droite MN satisfont à l'équation tangentielle de l'ellipse,

$$a^2u^2 + b^2v^2 - w^2 = 0.$$

On obtient
$$4\left(\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2}\right) = \left(\frac{\alpha^2}{a^2} - \frac{\beta^2}{b^2} + 1\right)^2$$

ou
$$\left(\frac{\alpha^2}{a^2} - \frac{\beta^2}{b^2} - 1\right)^2 - 8\frac{\beta^2}{b^2} = 0$$

ou
$$\frac{\alpha^2}{a^2} - \frac{\beta^2}{b^2} \pm \frac{2\beta\sqrt{2}}{b} - 1 = 0,$$

équation qui représente deux hyperboles symétriques l'une de l'autre par rapport à Ox, admettant Oy pour axe transverse (les centres ayant pour ordonnées $\pm b\sqrt{2}$), passant par les points A et A′, et ayant leurs asymptotes parallèles à celles de l'hyperbole donnée.

Solution géométrique. — **1°** — Menons par un point P deux sécantes PMM′, PNN′ dans une conique; soient R le point d'intersection de MN et M′N′, et Q le point d'intersection de MN′ et NM′. La droite QR est la polaire du point P. Projetons la figure de façon que M′N′ devienne la droite de l'infini; PM et PN deviennent parallèles aux asymptotes de la conique, MN est parallèle à QR, et le point Q devient le quatrième sommet du parallélogramme construit sur PM et PN. Donc le rapport des distances du point P à MN et à la polaire est égal à $\frac{1}{2}$.

2° — Supposons que la droite MN passe par le centre O ; construisons le parallélogramme dont deux côtés parallèles sont les tangentes en M et N et dont les diagonales sont les asymptotes. On voit aisément que le point P est le milieu d'un des côtés de ce parallélogramme; ce point appartient donc à l'hyperbole conjuguée de l'hyperbole donnée.

3°.— Toutes les coniques considérées sont bitangentes en A et A′ ; les polaires du point P par rapport à ces coniques passent donc par un point fixe. Parmi ces coniques se trouve la droite double AA′, par rapport à laquelle la polaire de P est cette droite elle-même. Considérons en outre la conique formée par les tangentes en A et A′; la polaire du point P est alors une perpendiculaire à AA′ au point R, conjugué harmonique de la projection Q de P sur AA′ par rapport à A et A′. Le point R est donc le point fixe cherché. Alors la droite MN passe par le milieu S de PR, et le lieu du point H est le cercle décrit sur OS comme diamètre.

4° — Faisons une transformation homographique de façon que les points A et A′ deviennent les points cycliques ; l'ellipse et l'hyperbole se transforment en deux cercles concentriques C et C′, et comme la droite AA′ passe par le point O, pôle de la droite de l'infini dans la première figure, cette droite de l'infini a pour correspondante dans la deuxième figure un diamètre commun aux deux cercles C et C′ ; ce diamètre rencontre C′ en deux points α et β qui correspondent aux points à l'infini de l'hyperbole donnée. Le problème est alors le suivant : on mène une tangente quelconque au cercle C, laquelle rencontre C′ aux points m et n, αm et βn se rencontrent en un point p dont on demande le lieu. On voit sans difficulté que l'angle mpn est constant, le lieu est donc un cercle passant par α et β; mais en menant les droites αn et βm, on a un second point p', et l'angle $mp'n$ est supplémentaire de mpn. Le lieu se compose donc de deux cercles passant par les points α et β.

Revenant à la première figure, on voit que le lieu se compose de deux hyperboles passant par les points A, A′ et ayant mêmes directions asymptotiques que l'hyperbole donnée.

Nous n'avons pas tenu compte dans cette solution de ce que le petit axe de l'ellipse était égal à la longueur géométrique de l'axe imaginaire de l'hyperbole. On en tiendra compte pour déterminer les points de ces hyperboles qui se trouvent sur Oy en considérant les tangentes à l'ellipse aux extrémités du petit axe.

Camille Rech, à Nancy.

Ont envoyé des solutions analytiques : MM. E. N. Barisien ; H. Cheronnet, école Monge : F. Faure, à Valence Edmond Galtier, lycée de Bordeaux Gérard, lycée Saint-Louis; M. Pimorin, soldat au 126e de ligne, à Toulouse.

---

126. — *La normale à une ellipse en un de ses points* M *rencontre la développée de l'ellipse en quatre points autres que son point de contact avec la développée. Prouver que les tangentes en ces points sont concourantes et trouver le lieu de leur point de concours quand le point* M *décrit l'ellipse.*

Soit $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ l'équation de l'ellipse rapportée à ses axes de symétrie. Désignons par (x_0, y_0) les coordonnées du point M, et soit R l'un des quatre points d'intersection de la normale en M avec la développée, le point de contact de la normale en M avec la développée étant écarté. La tangente en R à la développée est normale à l'ellipse en un point P; soient x, y les coordonnées du point P. Les coordonnées du point R sont

$$X = \frac{c^2x^3}{a^4}. \qquad Y = -\frac{c^2y^3}{\ }.$$

En exprimant que le point R est sur la normale en M, on trouve

$$\frac{x^3}{a^2x_0} + \frac{y^3}{b^2y_0} = 1 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2},$$

puisque le point P est sur l'ellipse, de sorte que

$$\frac{x^2(x - x_0)}{a^2x_0} = -\frac{y^2(y - y_0)}{b^2y_0}. \qquad (1)$$

Or

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1;$$

donc

$$\frac{x^2 - x_0^2}{a^2} = -\frac{y^2 - y_0^2}{b^2}; \qquad (2)$$

par suite les équations (1) et (2) donnent

$$\frac{x^2}{x_0(x + x_0)} = \frac{y^2}{y_0(y + y_0)}$$

ou

$$\frac{x^2(y + y_0)}{x_0} - \frac{y^2(x + x_0)}{y_0} = 0.$$

Cette équation mise sous forme entière devient

$$xy(xy_0 - yx_0) + x^2y_0^2 - y^2x_0^2 = 0;$$

elle se décompose en deux :

$$xy_0 - yx_0 = 0$$

et

$$xy + xy_0 + yx_0 = 0. \qquad (3)$$

La première représente le diamètre passant par le point M. Le point P et les trois points analogues sont donc sur l'hyperbole représentée par l'équation (3), que l'on peut identifier avec l'hyperbole d'Apollonius relative à un point (α, β), savoir

$$c^2xy + b^2\beta x - a^2\alpha y = 0,$$

en posant

$$\frac{b^2\beta}{c^2} = y_0, \qquad \frac{a^2\alpha}{c^2} = -x_0.$$

Ce qui prouve que les tangentes à la développée aux quatre points tels que R se coupent en un point H ayant pour coordonnées (α, β). Si le point M décrit l'ellipse donnée, on a

$$\frac{a^2\alpha^2}{c^4} + \frac{b^2\beta^2}{c^4} = 1.$$

Le lieu du point H est donc une ellipse dont les axes de symétrie coïncident en direction avec ceux de l'ellipse donnée et qui passe par les quatre points de rebroussement de la développée. Il résulte de là, que des quatre normales issues de chaque point H, deux seulement sont réelles.

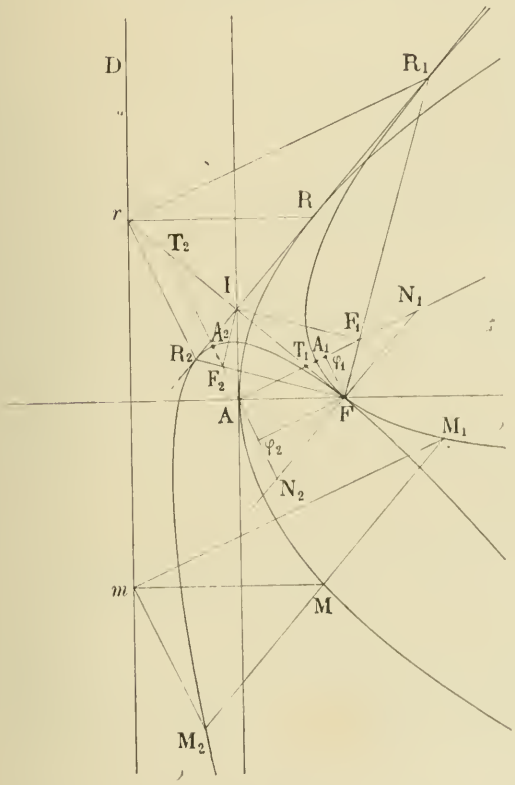
SOLENIE (lycée Louis-le-Grand).

Solutions analogues : MM. de BOISFLEURY (collège Stanislas); André DURAND. — Autres solutions : MM. HENRI (lycée Louis-le-Grand); MADAULE (lycée Louis-le-Grand).

GÉOMÉTRIE

99. — Solution géométrique du problème proposé au concours d'admission à l'École polytechnique en 1891.

1° Soit M_1 un point du lieu, correspondant, pour un sens déterminé de la droite Δ, au point M de la parabole P, projeté en m sur la directrice D. La base mM_1 du triangle isocèle mMM_1 ayant une direction fixe, on voit que le lieu du point M_1 est la figure homologique de la parabole P, le centre d'homologie étant à l'infini sur Δ, D étant l'axe d'homologie, enfin les points à l'infini de mM_1 et de mM étant deux points homologues. Ce lieu est donc une parabole P_1, qui touche en un point R_1 la parallèle à Δ tangente à la parabole P au point R et qui admet rR_1 pour diamètre; elle passe d'ailleurs évidemment par le foyer F de la parabole P. Le lieu du point M_2, correspondant à l'autre sens de Δ, est la parabole analogue P_2.



2° On voit immédiatement que les directions mM_1 et mM_2 des axes de ces deux paraboles sont rectangulaires.

Le foyer F_1 de la parabole P_1 est sur la corde R_1F, symétrique du diamètre R_1r par rapport à la tangente R_1R : la tangente au point F est donc la perpendiculaire FI à R_1R et le foyer F_1 est la projection du point I sur R_1F. On a d'ailleurs

$$\widehat{FAF_1} = \widehat{FIF_1} = \widehat{FR_1R} = \widehat{RR_1r} = \widehat{RrR_1}.$$

Il en résulte que la droite AF_1, parallèle à rR_1, est l'axe de la parabole P_1. L'axe de la parabole P_2 pivote de même autour du point A, sommet de la parabole P.

Soient φ_1N_1 et φ_2N_2 les sous-normales relatives au point F dans chacune des paraboles P_1, P_2 ; les triangles AFN_1 et AFN_2 étant isocèles, on a

$$\varphi_1N_1 = A\varphi_1 \qquad \varphi_2N_2 = A\varphi_2.$$

Donc
$$\overline{\varphi_1N_1}^2 + \overline{\varphi_2N_2}^2 = \overline{AF}^2,$$

ou
$$p_1^2 + p_2^2 = \frac{p^2}{4}.$$

3° Soient T_1 et T_2 les points où la tangente FI coupe les axes AF_1, AF_2. Comme

$$IT_1 = IA = IT_2,$$

le lieu de ces points est la strophoïde droite dont F est le sommet, A le point double. D'autre part, le lieu des points φ_1 et φ_2 est le cercle décrit sur AF comme diamètre. Les sommets A_1 et A_2 étant les milieux des sous-tangentes φ_1T_1 et φ_2T_2, leur lieu est facile à construire et à étudier.

Si nous transformons la figure par rayons vecteurs réciproques, A étant le pôle et $\overline{AF}^2$ la puissance d'inversion, la strophoïde devient l'hyperbole équilatère de sommets A et F et le cercle AF la tangente en F à cette conique. La transformée A_1' du point A_1 étant le conjugué harmonique de A par rapport

aux points φ_1' et T_1' inverses de φ_1 et T_1 le lieu de A_1' est une conique homologique de l'hyperbole équilatère AF, A étant l'origine et la tangente en F étant l'axe. Le lieu du sommet A_1 est donc l'inverse d'une conique par rapport à son sommet.

Son équation est facile à trouver en coordonnées polaires; c'est

$$\rho = \frac{p}{4\cos\omega}(3\cos^2\omega - 1),$$

A étant le pôle et AF l'axe polaire.

Ernest Duporcq (école Monge).

Nota. — Nous avons également reçu d'autres solutions de MM. Perrée et Haardleicher (lycée Condorcet) et Avrillier.

QUESTIONS PROPOSÉES

130. — Pour que deux normales à une surface du second degré soient concourantes, il faut et il suffit que la droite qui joint les pieds de ces normales soit perpendiculaire à sa conjuguée.

(C. Hugon.)

* **131.** — Soient $u = f(x)$, $v = \varphi(x)$ deux polynomes entiers premiers entre eux. Si l'équation

$$u^2 - 3uv + 2v^2 = 0$$

admet la racine a au degré p de multiplicité, l'équation

$$u'^2 - 3u'v' + 2v'^2 = 0$$

admet la racine a au moins au degré $p - 1$; u' et v' etant les dérivées de u et de v.

(A. Blondel, lycée d'Amiens.)

132. — Étant donnés une conique à centre et un point A sur cette conique :

1° On mène un diamètre variable Δ et l'on fait passer un cercle par le point A et les extrémités de ce diamètre. Trouver le lieu du point de rencontre M du diamètre Δ avec la droite joignant le point A au quatrième point d'intersection de la conique et du cercle. Ce lieu est une conique (C). Construire cette conique.

2° Déterminer la position du point A pour que (C) passe par un point donné H. Dans quelle région du plan doit se trouver H pour que A soit réel?

3° A chaque point H correspondent deux points A, soient A_1, A_2. Lieu de H tel que le milieu de A_1A_2 coïncide avec H.

4° Trouver l'enveloppe de la polaire des points M de (C) par rapport à la conique donnée [polaire réciproque de (C)].

5° Lieu des foyers de l'enveloppe trouvée quand le point A décrit la conique donnée.

133. — Étant donné un quadrilatère circonscriptible à un cercle, on déforme ce quadrilatère, ses côtés conservant des longueurs invariables et deux sommets restant fixes; lieu du centre du cercle inscrit.

(H. Pilleux.)

Le Rédacteur-Gérant : H. VUIBERT.

PARIS — IMP. CHAIX. — 28694-12-94.

2e Année. N° 5. Février 1892.

REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

ALGÈBRE

122. — *Étant donnés un polynome entier en* x, $f(x)$, *et un polynome entier* $\varphi(x)$ *premier avec sa dérivée* $\varphi'(x)$, *trouver tous les polynomes entiers* $P(x)$ *tels que*

$$f(x) + P(x)\varphi'(x)$$

soit divisible par $\varphi(x)$.

Si le degré de $\varphi(x)$ *est égal à* m, *montrer que l'on peut déterminer* $P(x)$ *de degré* $m - 1$ *par exemple, sans résoudre l'équation* $\varphi(x) = 0$.

Soit a l'une quelconque des m racines de l'équation $\varphi(x) = 0$. Le polynome $P(x)$ doit vérifier l'égalité

$$f(a) + P(a)\varphi'(a) = 0,$$

et comme $\varphi'(a)$ est différent de zéro, on doit avoir

$$P(a) = -\frac{f(a)}{\varphi'(a)}.$$

Par conséquent le polynome cherché $P(x)$ prend les mêmes valeurs que la fraction $-\frac{f(x)}{\varphi'(x)}$ quand on substitue à x les racines de l'équation $\varphi(x) = 0$. Il suffit donc d'appliquer la formule de Lagrange; on trouve ainsi

$$P(x) = -\sum \frac{\varphi(x)}{x-a}\,\frac{f(a)}{[\varphi'(a)]^2} + \varphi(x).Q(x),$$

$Q(x)$ désignant un polynome entier arbitraire. En supposant $Q(x) = 0$, on aura pour $P(x)$ un polynome de degré $m - 1$ au plus, que l'on peut déterminer sans résoudre l'équation $\varphi(x) = 0$. En effet, l'existence d'un polynome $P(x)$ de degré $m - 1$ étant établie, on peut effectuer la division du polynome entier

$$f(x) + P(x)\varphi'(x) \quad \text{par} \quad \varphi(x),$$

$P(x)$ désignant un polynome entier de degré $m - 1$ dont on déterminera les coefficients en écrivant que le reste de la division est identiquement nul.

On peut encore procéder ainsi : les polynomes $\varphi(x)$ et $\varphi'(x)$ étant premiers entre eux, il existe deux polynomes entiers $U(x)$ et $V(x)$ vérifiant l'identité

$$U(x)\varphi(x) + V(x)\varphi'(x) = 1.$$

Si a désigne comme plus haut l'une quelconque des racines de l'équation $\varphi(x) = 0$, on a

$$V(a)\varphi'(a) = 1;$$

donc

$$-\frac{f(a)}{\varphi'(a)} = -V(a)f(a).$$

Divisons $-V(x)f(x)$ par $\varphi(x)$, ce qui donne

$$-V(x)f(x) = \varphi(x).Q_1(x) + R(x),$$

$Q_1(x)$ et $R(x)$ désignant des polynomes entiers, le degré de $R(x)$ étant au plus $m-1$. En vertu de l'identité précédente : $-V(a)f(a) = R(a)$. Le polynome $P(x)$ de degré $m-1$ doit donc prendre les mêmes valeurs que $R(x)$, par suite

$$P(x) = R(x).$$

G. Raynaud, lycée d'Alger.

Solutions analogues : MM. L. Pierre (lycée Condorcet) ; H. Allard (lycée Condorcet) ; Audibert (Marseille) ; Fromage (Saint Louis) ; A. de Boisfleury (collège Stanislas) ; Favre (au Prytanée).

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

93. — *D'un point* M *d'une lemniscate, on peut mener quatre tangentes à cette courbe, outre celle qui touche la courbe en* M. *Prouver que les quatre points de contact de ces tangentes sont sur une ligne droite, et chercher l'enveloppe de cette droite quand le point* M *décrit la lemniscate.*

L'équation de la lemniscate rapportée aux deux tangentes au point double est de la forme

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2xy.$$

En posant $y = t^2x$, on obtient les coordonnées d'un point de la courbe :

$$x = \frac{at}{1+t^4}, \qquad y = \frac{at^3}{1+t^4}.$$

Cherchons quelle valeur il faut donner au paramètre t pour que le point représenté par les équations précédentes soit sur une droite ayant pour équation

$$ux + vy - 1 = 0.$$

On trouve immédiatement $\qquad au.t + av.t^3 - (1+t^4) = 0,$

ou $\qquad t^4 - av.t^3 - au.t + 1 = 0. \qquad (1)$

Si une droite est tangente à la lemniscate, deux des racines de l'équation (1) correspondant à cette droite sont égales. Or il y a entre les racines t_1, t_2, t_3, t_4 de l'équation (1) deux relations indépendantes de u et de v, savoir

$$t_1t_2t_3t_4 = 1$$

et

$$t_1t_2 + t_3t_4 + (t_1+t_2)(t_3+t_4) = 0.$$

Si l'on suppose $t_3 = t_4$, en désignant par t la valeur commune de ces deux racines, on aura

$$t_1t_2t^2 = 1$$

et

$$t_1t_2 + t^2 + 2(t_1+t_2)t = 0.$$

Si l'on élimine t_2 entre ces deux équations, on obtient

$$t^4t_1 + 2t^3t_1^2 + 2t + t_1 = 0. \qquad (2)$$

Cette équation donne les valeurs du paramètre t qui correspondent aux quatre tangentes issues du point t_1. Or on peut identifier l'équation (2) à l'équation (1) en posant

$$av = -2t_1, \qquad au = -\frac{2}{t_1},$$

ce qui montre que les points de contact des tangentes issues du point t_1 sont sur la droite représentée par l'équation

$$2t_1^2 y + at_1 + 2x = 0.$$

L'enveloppe de cette droite a pour équation

$$a^2 - 16xy = 0;$$

c'est une hyperbole équilatère dont les asymptotes sont les tangentes au point double de la lemniscate donnée.

L. Perrée (Condorcet).

Solutions analogues par MM. E. Jacquest (Dijon); Th. Got (Montpellier); E. Duporcq (Monge); G. Alizi (lycée de Bordeaux); Bourrienne (lycée Corneille, Rouen).

SECONDE SOLUTION

La lemniscate rapportée à ses axes de symétrie a pour équation

$$(x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) = 0.$$

Soit $M(\alpha, \beta)$ un point de cette courbe. La première polaire du point M a pour équation

$$(\alpha x + \beta y)(x^2 + y^2) - a^2(x^2 - y^2 + \alpha x - \beta y) = 0. \qquad (1)$$

La condition

$$(\alpha^2 + \beta^2)^2 - 2a^2(\alpha^2 - \beta^2) = 0 \qquad (2)$$

permet de mettre l'équation (1) sous la forme

$$(x^2 + y^2 + px + qy)(\alpha x + \beta y + \lambda) = 0. \qquad (3)$$

Pour que les équations (1) et (2) soient identiques, il faut:

$$p = -\frac{2a^2\alpha}{\alpha^2 + \beta^2}, \qquad q = \frac{2a^2\beta}{\alpha^2 + \beta^2}, \qquad \lambda = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2};$$

la polaire se décompose ainsi en un cercle ayant pour équation

$$x^2 + y^2 - \frac{2a^2\alpha}{\alpha^2 + \beta^2}x + \frac{2a^2\beta}{\alpha^2 + \beta^2}y = 0.$$

et en une droite ayant pour équation

$$\alpha x + \beta y + \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2} = 0. \qquad (4)$$

Les quatre tangentes issues du point M ont leurs points de contact sur cette droite, car le cercle coupe la lemniscate aux points cycliques qui sont des points doubles de la lemniscate, et aux points déterminés par l'équation

$$\frac{4a^4(\alpha x - \beta y)^2}{(\alpha^2 + \beta^2)^2} = 2a^2(x^2 - y^2)$$

ou, en tenant compte de la relation

$$\frac{2a^2}{(\alpha^2 + \beta^2)^2} = \frac{1}{\alpha^2 - \beta^2},$$

aux points définis par

$$(\alpha x - \beta y)^2 = (x^2 - y^2)(\alpha^2 - \beta^2)$$

ou

$$(\alpha y - \beta x)^2 = 0,$$

c'est-à-dire au point M qui compte pour deux points.

Il nous reste à trouver l'enveloppe de la droite (4). En tenant compte de l'équation (2), on peut écrire ainsi l'équation (4):

$$\alpha x + \beta y + \frac{a\sqrt{2}}{2}\sqrt{\alpha^2 - \beta^2} = 0.$$

En posant $\gamma = \frac{a\sqrt{2}}{2}\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}$, on voit que

$$2\gamma^2 = a^2\alpha^2 - a^2\beta^2;$$

donc la droite enveloppe l'hyperbole équilatère ayant pour équation

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = \frac{1}{2}$$

ou

$$x^2 - y^2 = \frac{a^2}{2}.$$

L. Perrée (Condorcet).

Solution analogue : M. Auzeram (Toulouse).

TROISIÈME SOLUTION (généralisation)

Considérons une quartique K ayant pour équation

$$Ay^2z^2 + Bz^2x^2 + Cx^2y^2 = 0. \qquad (1)$$

Les sommets du triangle de référence sont des points doubles avec tangentes d'inflexion. La lemniscate est une courbe de ce genre; son équation se ramène à la forme précédente quand on prend pour sommets du triangle de référence le point double réel et les points cycliques qui sont des points doubles de la lemniscate.

La cubique polaire d'un point M (α, β, γ) a pour équation

$$P \equiv \alpha x(Bz^2 + Cy^2) + \beta y(Cx^2 + Az^2) + \gamma z(Ay^2 + Bx^2).$$

Si l'on pose

$$Q \equiv A\beta\gamma yz + B\gamma\alpha zx + C\alpha\beta xy,$$

$$R \equiv A\beta^2\gamma^2 + B\gamma^2\alpha^2 + C\alpha^2\beta^2,$$

on a identiquement

$$P.\alpha\beta\gamma \equiv Q(\beta\gamma x + \gamma\alpha y + \alpha\beta z) - xyzR.$$

Si le point (α, β, γ) est sur la courbe (1), $R = 0$, et par suite

$$P \equiv (A\beta\gamma yz + B\gamma\alpha zx + C\alpha\beta xy)\left(\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} + \frac{z}{\gamma}\right).$$

Donc la première polaire du point M se décompose en une conique, $Q = 0$, circonscrite au triangle de référence, et une droite qui a pour équation

$$\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} + \frac{z}{\gamma} = 0. \qquad (2)$$

La première polaire passe par les points de contact des quatre tangentes issues de M, par le point M où elle touche K et par les trois points doubles. La droite ne passe ni par M ni par les points doubles, et comme la conique ne rencontre la quartique qu'en ces points, on en conclut que les points de contact des tangentes issues de M sont sur la droite. La forme de l'équation (2) montre que cette droite est la polaire trilinéaire du point M relativement au triangle de référence. Dans le cas de la lemniscate la droite (2) s'obtiendra en joignant M au point double réel O, en prolongeant le segment MO d'une longueur égale à sa moitié et menant par le point obtenu une perpendiculaire à MO.

Si K est une lemniscate, la conique Q est un cercle, puisqu'elle passe par les points cycliques.

Cherchons l'enveloppe de la droite (2). Son équation est de la forme

$$ux + vy + wz = 0,$$

en posant

$$\frac{u}{\left(\frac{1}{\alpha}\right)} = \frac{v}{\left(\frac{1}{\beta}\right)} = \frac{w}{\left(\frac{1}{\gamma}\right)}.$$

On a donc, puisque (α, β, γ) est sur K,

$$Au^2 + Bv^2 + Cw^2 = 0.$$

L'enveloppe a donc pour équation

$$\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \frac{z^2}{C} = 0.$$

Dans le cas de la lemniscate on trouve une hyperbole équilatère. La lemniscate est le lieu des symétriques du centre de cette hyperbole par rapport à ses tangentes; autrement dit, elle est l'enveloppe d'un cercle passant par le centre de l'hyperbole et dont le centre décrit l'hyperbole.

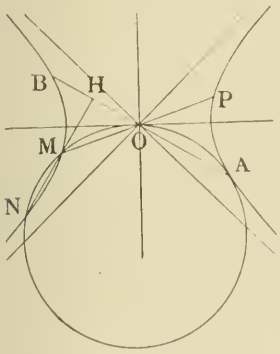
Ed. Husson (lycée de Nancy.)

Solution analogue par M. L. P. Randon.

SOLUTION GÉOMÉTRIQUE

En prenant pour pôle d'inversion le centre O de la lemniscate, on la transforme en une hyperbole équilatère : la question revient donc à prouver que si, par le centre O et par un point M d'une hyperbole équilatère, on mène les quatre cercles tangents à la courbe en des points autres que M, ces points sont sur un cercle passant par O.

Soit, en effet, OMNA un cercle tangent en A à l'hyperbole : la corde MN et le diamètre AOB sont rectangulaires en H, car ces droites sont en direction symétriques de la tangente en A, la première par rapport aux axes, et la seconde par rapport aux asymptotes de l'hyperbole. Le rapport des carrés des diamètres parallèles à ces droites est donc -1. Par suite, en vertu du théorème de Newton,



$$\frac{HA.HB}{HM.HN} = -1.$$

Comme d'ailleurs

$$\frac{HA.HO}{HM.HN} = 1.$$

H est le milieu de OB. M est donc équidistant des points O et B, et, par suite, son symétrique P, par rapport au centre, est aussi équidistant des points O et A. Le point A est donc sur le cercle de centre P passant par O.

Dans la lemniscate, les quatre points de contact des tangentes menées de M sont donc sur la perpendiculaire élevée au milieu Q de OP, P étant le symétrique de M par rapport au centre.

D'ailleurs le point Q décrit une lemniscate qui est, comme on sait, la podaire du point O relative à l'hyperbole équilatère qui a les mêmes sommets : cette hyperbole est donc l'enveloppe cherchée.

Ernest Deporcq (école Monge.)

MM. A. Blondel (lycée d'Amiens), L. Dreyfus (Bar-le-Duc), Desgombes, Haarbleicher (lycée Condorcet), F. J. Guest (lycée de Dijon), ont également résolu la question en employant la méthode d'inversion.

SOLUTION GÉOMÉTRIQUE DE LA QUESTION 123

J'ai démontré géométriquement la propriété suivante (question 93) :

Par le centre O d'une hyperbole équilatère et un de ses points A, on peut mener quatre cercles tangents à cette courbe en des points différents de A et situés sur un cercle qui passe par le centre O et a pour centre le symétrique A′ de A par rapport à ce point.

Si nous transformons homographiquement ce résultat, de sorte que les ombilics du plan aient pour transformées les points à l'infini de deux droites rectangulaires, l'hyperbole équilatère se transforme en une conique (C) admettant ces droites pour axes, le point A devient un point de cette courbe

(α), et les cercles considérés ont pour transformées les hyperboles d'Apollonius passant par ce point et tangentes à la conique (C) : les quatre points de contact ainsi obtenus sont situés sur une même hyperbole d'Apollonius.

Les normales en ces points sont donc concourantes. Or chacune d'elles rencontre la normale au point α, au point où elle touche la développée, puisqu'elle équivaut à deux normales infiniment voisines menées de ce point à la conique (C). Inversement les tangentes menées à la développée aux points où elle coupe la normale en α, sont concourantes.

Le centre de l'hyperbole d'Apollonius correspondant aux pieds de ces normales est le symétrique α' de α par rapport au point O. Le lieu du point de concours des normales coïncide donc avec le lieu des points tels que les hyperboles d'Apollonius correspondantes aient leurs centres sur la conique, c'est-à-dire, comme on le voit aisément, avec une conique ayant mêmes directions d'axes que la conique (C) et passant par les points de rebroussement de la développée.

(Ernest Duporcq, École Monge.)

---

125. — *1° Trouver l'enveloppe d'une série d'ellipses concentriques ayant les mêmes directions d'axes et pour lesquelles la somme des axes est constante.*

2° Trouver la développée de cette enveloppe.

SOLUTION ANALYTIQUE

1° L'équation d'une des ellipses considérées étant

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0,$$

avec la condition

$$a + b = l,$$

on aura l'équation de l'enveloppe cherchée en éliminant a et b entre ces équations et la suivante :

$$\frac{x^2}{a^3} = \frac{y^2}{b^3}.$$

La première pouvant être remplacée par

$$x = a\cos\varphi, \qquad y = b\sin\varphi,$$

la troisième devient

$$\frac{\cos^2\varphi}{a} = \frac{\sin^2\varphi}{b} = \frac{1}{l};$$

d'où l'on déduit que l'enveloppe peut être représentée par les équations simultanées

$$x = l\cos^3\varphi, \qquad y = l\sin^3\varphi.$$

C'est donc une astroïde.

2° La normale au point φ a pour équation

$$(x - l\cos^3\varphi)\frac{dx}{d\varphi} + (y - l\sin^3\varphi)\frac{dy}{d\varphi} = 0$$

ou

$$(x - l\cos^3\varphi)\cos\varphi - (y - l\sin^3\varphi)\sin\varphi = 0,$$

et, en remarquant que

$$\cos^4\varphi - \sin^4\varphi = \cos 2\varphi,$$

on obtient

$$x\cos\varphi - y\sin\varphi - l\cos 2\varphi = 0.$$

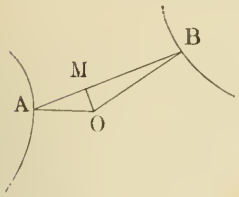
Cette normale coupe donc les bissectrices des axes aux points

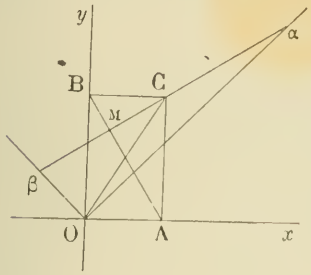
$$x = y = \frac{l\cos 2\varphi}{\cos\varphi - \sin\varphi}, \qquad x = -y = \frac{l\cos 2\varphi}{\cos\varphi + \sin\varphi},$$

dont la distance est $2l$. La développée cherchée est donc aussi une astroïde.

SOLUTION GÉOMÉTRIQUE

1° Toutes les ellipses considérées peuvent être envisagées comme les trajectoires des différents points d'une droite mobile dont la longueur est égale à la somme des axes donnée, et dont les extrémités glissent sur les axes donnés. Or, considérons une droite de longueur fixe dont les extrémités décrivent deux courbes. Soit O le centre instantané de rotation correspondant à la position AB : sa projection M sur AB sera le point de contact de cette droite avec son enveloppe. D'autre part, si l'on considère la trajectoire du point M de la droite AB, sa normale en M sera OM : elle sera donc tangente au point M à l'enveloppe de AB. Par suite l'enveloppe des trajectoires des différents points de AB est l'enveloppe de cette droite. Dans le cas particulier qui nous occupe, l'enveloppe cherchée est donc une astroïde.





2° Maintenant la développée d'une astroïde est une astroïde. Soit, en effet, CM une normale correspondant à la position AB : les droites AB et CO étant également inclinées sur les axes, les droites AB et CM sont également inclinées sur les bissectrices. Si donc α et β sont les points où CM coupe ces dernières on a

$$\alpha\beta = 2OC = 2AB,$$

ce qui montre que la développée cherchée est une astroïde.

(Ernest Duporcq, école Monge).

(Ont envoyé des solutions exactes : MM. Bourrienne (Rouen) ; L. Gérard (lycée Saint-Louis) ; G. Théron (lycée Condorcet) ; L. Maury (répétiteur au lycée d'Alais) ; A. Blondel (lycée d'Amiens) ; C. Hugon ; capitaine Barisien ; L. Perrée (lycée Condorcet) ; E. Gueden (lycée Saint-Louis) ; Mlle C. Pompilianu (à Bucarest).

Remarque. — Pour trouver la développée, plusieurs de nos correspondants ont fait remarquer que l'astroïde est une épicycloïde et que la développée d'une épicycloïde est une épicycloïde semblable. Dans le cas présent, la développée de l'astroïde s'obtient en construisant une astroïde homothétique à la première dans le rapport de 2 à 1, et en la faisant tourner de 45° autour du centre.

Enfin, pour trouver l'enveloppe de la droite représentée par l'équation

$$x \cos \varphi - y \sin \varphi = l \cos 2\varphi$$

quelques correspondants ont suivi la méthode de Salmon. On écrit l'équation précédente sous la forme

$$x \cos \varphi - y \sin \varphi = l(\cos \varphi + \sin \varphi)(\cos \varphi - \sin \varphi)$$

ou $$(x + y)(\cos \varphi - \sin \varphi) + (x - y)(\cos \varphi + \sin \varphi) = 2l(\cos \varphi + \sin \varphi)(\cos \varphi - \sin \varphi)$$

ou encore $$\frac{x + y}{\cos \varphi + \sin \varphi} + \frac{x - y}{\cos \varphi - \sin \varphi} = 2l,$$

ce qu'on peut écrire ainsi : $$\frac{x + y}{\sin\left(\frac{\pi}{4} + \varphi\right)} + \frac{x - y}{\cos\left(\frac{\pi}{4} + \varphi\right)} = l\sqrt{2}.$$

L'enveloppe a donc pour équation $$(x + y)^2 + (x - y)^2 = 2l^2.$$

Remarque. — La première partie de la question précédente est un cas particulier de la proposition suivante, qui est bien connue :

Quand une courbe de forme invariable se déplace dans son plan, son enveloppe est la même que celle des trajectoires des différents points de cette courbe, en supposant que le déplacement ne dépende que de la variation d'un seul paramètre.

Nous donnons une démonstration de ce théorème dans la note suivante.

SUR LA THÉORIE DES ENVELOPPES

Supposons qu'on donne deux équations de la forme

$$f(x, y, \alpha, \beta) = 0, \tag{1}$$

$$\varphi(x, y, \alpha, \beta) = 0. \tag{2}$$

Si l'on donne à α une valeur constante α_0, les deux équations

$$f(x, y, \alpha_0, \beta) = 0, \tag{3}$$

$$\varphi(x, y, \alpha_0, \beta) = 0. \tag{4}$$

représentent une courbe dont on obtiendra l'équation en éliminant β entre les équations (3) et (4); soit

$$F(x, y, \alpha_0) = 0 \tag{5}$$

l'équation ainsi obtenue. Nous pouvons dire que cette courbe est définie par l'équation $\alpha = \alpha_0$ et nous proposer de trouver son enveloppe quand α_0 varie d'une manière continue. On obtiendrait l'équation de cette enveloppe en éliminant α entre les équations (1), (2) et l'équation

$$F'_\alpha(x, y, \alpha) = 0. \tag{6}$$

Or, si l'on regarde l'équation (2) comme définissant β en fonction de α, x, y de sorte que

$$\beta = \psi(\alpha, x, y),$$

on peut dire que l'équation $F(x, y, \alpha) = 0$ est équivalente à l'équation

$$f[x, y, \alpha, \psi(\alpha, x, y)] = 0.$$

On obtiendra donc l'équation (6) en égalant à zéro la dérivée de la fonction $f(x, y, \alpha, \beta)$ prise par rapport à α, en regardant x et y comme des constantes et β comme une fonction de α définie par l'équation (2); en d'autres termes, on doit poser

$$f'_\alpha + f'_\beta \cdot \beta'_\alpha = 0,$$

$$\varphi'_\alpha + \varphi'_\beta \cdot \beta'_\alpha = 0,$$

c'est-à-dire

$$f'_\alpha \cdot \varphi'_\beta - f'_\beta \cdot \varphi'_\alpha = 0. \tag{7}$$

L'enveloppe des courbes $\alpha = \text{const.}$ s'obtiendra donc en éliminant α et β entre les équations (1), (2) et (7). On en conclut immédiatement que *l'enveloppe des courbes $\alpha = const.$ est la même que l'enveloppe des courbes $\beta = const.$*

Cela posé, considérons une courbe mobile, de forme invariable, rapportée à deux axes rectangulaires $x\omega y$ auxquels elle est liée invariablement, et dont l'équation est

$$y = f(x).$$

Soit en outre XOY un système d'axes fixes rectangulaires, et désignons par x_1, y_1 les coordonnées de ω par rapport au système fixe, et par α l'angle de OX avec ωx. Nous pouvons regarder x_1 et y_1 comme des fonctions de α. Les coordonnées X, Y d'un point M de la courbe mobile sont données par les formules.

$$X = x_1 + x \cos \alpha - f(x) \sin \alpha,$$

$$Y = y_1 + x \sin \alpha + f(x) \cos \alpha.$$

(X, Y) sont fonctions des deux paramètres x, α.

Si l'on donne à α une valeur constante et si l'on fait varier x, les équations précédentes représentent la courbe mobile dans une position particulière; si, au contraire, x restant constant, α varie, elles représentent la trajectoire du point M. Donc, en appliquant le théorème établi plus haut, on voit que

Lorsqu'une courbe plane de forme invariable se déplace dans son plan, les trajectoires de tous ses points ont la même enveloppe et cette enveloppe est la même que celle des positions successives de la courbe mobile.

Supposons que les équations (1) et (2) aient la forme plus simple :

$$x = f(\alpha, \beta) \quad , \quad y = \varphi(\alpha, \beta).$$

Dans ce cas l'équation (7) peut être interprétée géométriquement de la façon suivante. Au point (α, β) correspond le point (x, y). Désignons le premier par P, le second par M. Si le point P décrit une courbe, la tangente en P a pour coefficient angulaire $\frac{d\beta}{d\alpha}$; le coefficient angulaire de la tangente en M à la courbe correspondante est

$$\frac{\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} + \frac{\partial\varphi}{\partial\beta}\cdot\frac{d\beta}{d\alpha}}{\frac{\partial f}{\partial\alpha} + \frac{\partial f}{\partial\beta}\cdot\frac{d\beta}{d\alpha}}.$$

L'équation (7) est par rapport à deux axes $O\alpha$, $O\beta$, l'équation de la courbe sur laquelle doit se trouver le point P pour que la tangente en M à la courbe décrite par le point M soit indépendante de la direction du déplacement donné au point P.

Si le point P décrit la parallèle à l'axe des α, ayant pour équation $\beta = \beta_0$ le point M décrit une certaine courbe, que nous avons appelée la courbe $\beta = \beta_0$. Plus généralement, regardons β comme une fonction de α, soit $\beta = \psi(\alpha)$; le point M est défini par les deux équations

$$\left.\begin{aligned} x &= f[\alpha, \psi(\alpha)] \\ y &= \varphi[\alpha, \psi(\alpha)] \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

Désignons pour abréger par (E) la courbe représentée par l'équation (7). Soit P_0 un point commun à cette courbe et à la courbe représentée par l'équation $\beta = \psi(\alpha)$. Les équations (8) définissent une courbe; au point M_0, correspondant à P_0, cette courbe est tangente à (E), on peut donc énoncer ce théorème plus général que le premier :

Les courbes représentées par les équations (8), *dans lesquelles on fait varier la fonction arbitraire* $\psi(\alpha)$, *sont toutes tangentes à une même courbe* (E).

En d'autres termes, si l'on considère un point M, dont les coordonnées sont des fonctions *données* des coordonnées d'un point paramétrique P, les courbes décrites par le point M, quand le point paramétrique P se meut sur une courbe *arbitraire*, sont toutes tangentes à une même courbe qu'on peut considérer comme leur enveloppe.

Remarque. — Pour que le théorème soit vrai, il est nécessaire que la courbe (E) existe. Il est clair, par exemple, que si l'on avait

$$x = \alpha, \qquad y = \beta,$$

le point M décrirait la même courbe que P, c'est-à-dire une courbe entièrement arbitraire. Dans ce cas

$$\frac{\partial f}{\partial\alpha}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial\beta} - \frac{\partial f}{\partial\beta}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}$$

se réduit à l'unité.

La proposition que nous venons d'établir est très facile à démontrer par une autre voie.

Les équations

$$x = f(\alpha, \beta), \qquad (1')$$

$$y = \varphi(\alpha, \beta), \qquad (2')$$

$$z = \psi(\alpha, \beta) \qquad (9)$$

représentent une infinité de surfaces, si l'on suppose que la fonction $\psi(\alpha, \beta)$ soit arbitraire. Le plan

tangent en un point a pour équation

$$(X - x)\left(\frac{\partial\psi}{\partial\alpha}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial\beta} - \frac{\partial\varphi}{\partial\beta}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial\alpha}\right) + (Y - y)\left(\frac{\partial\psi}{\partial\alpha}\cdot\frac{\partial f}{\partial\beta} - \frac{\partial\psi}{\partial\beta}\cdot\frac{\partial f}{\partial\alpha}\right) + (Z - z)\left(\frac{\partial f}{\partial\alpha}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial\beta} - \frac{\partial f}{\partial\beta}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}\right) = 0.$$

Pour que ce plan soit parallèle à l'axe des z, il faut et il suffit que l'on ait

$$\frac{\partial f}{\partial\alpha}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial\beta} - \frac{\partial f}{\partial\beta}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} = 0. \tag{7}$$

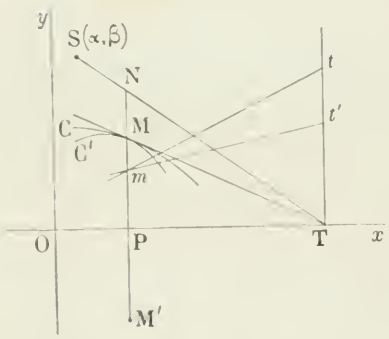
La trace sur le plan des xy du cylindre circonscrit dont les génératrices sont parallèles à l'axe des z est déterminée par les équations (1′), (2′), (7). Donc toutes les surfaces considérées sont inscrites dans un même cylindre. Or les équations (1′), (2′) représentent la projection sur le plan des xy d'une courbe quelconque tracée sur une de ces surfaces et l'on sait que ces projections sont tangentes au contour apparent de la surface sur le plan des xy.

(B. N.)

---

114. — *Étant donnés une courbe plane quelconque* (C) *rapportée à deux axes rectangulaires* Ox, Oy *et un point* S *dans son plan; on prend un point* M *sur* (C) *et l'on mène la tangente* MT *à cette courbe en* M. *Cette tangente coupe l'axe des* x *en* T, *que l'on joint à* S; *la droite* ST *coupe l'ordonnée de* M *au point* N. *On prend le point* m, *conjugué harmonique de* N *par rapport à* M *et à son symétrique* M′ *par rapport à* Ox. *On demande le lieu de* m *quand* M *parcourt la courbe* (C), *ainsi que la tangente à ce lieu en chacun des points* m.

1. — Soient x et y les coordonnées d'un point M quelconque pris sur la courbe (C); l'équation de la tangente MT en ce point est



$$Y - y = \frac{dy}{dx}(X - x).$$

L'abscisse de T est donc $\dfrac{x\dfrac{dy}{dx} - y}{\dfrac{dy}{dx}}$; par suite l'équation de la droite ST est

$$Y - \beta = (X - \alpha)\frac{\beta\dfrac{dy}{dx}}{y - (x - \alpha)\dfrac{dy}{dx}},$$

et l'ordonnée du point N est

$$\frac{\beta y}{y - (x - \alpha)\dfrac{dy}{dx}}.$$

Or on a, par hypothèse,

$$\overline{Pm}.\overline{PN} = \overline{PM}^2;$$

donc si l'on désigne par y_1 l'ordonnée de m, on a

$$y_1 = \frac{y^2 - (x - \alpha)y\dfrac{dy}{dx}}{\beta}. \tag{1}$$

L'élimination de y entre cette équation et celle de (C) donnerait l'équation du lieu de m. Mais nous avons surtout pour objet la construction de la tangente mt à ce lieu et il n'est pas nécessaire d'avoir l'équation du lieu de m. Le coefficient angulaire de mt est $\dfrac{dy_1}{dx}$. Or

$$\frac{dy_1}{dx} = \frac{y\dfrac{dy}{dx} - (x - \alpha)\left[y\dfrac{d^2y}{dx^2} + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right]}{\beta}. \tag{2}$$

L'équation de mt est $$Y - y_1 = \frac{dy_1}{dx}(X - x).$$

Cherchons l'ordonnée du point t de cette tangente qui a même abscisse que T, c'est-à-dire faisons

$$X = x - \frac{y}{\frac{dy}{dx}}.$$

Il vient, toutes réductions faites, $$\overline{Tt} = \frac{(x-\alpha)y^2\frac{d^2y}{dx^2}}{\beta\frac{dy}{dx}}. \qquad (3)$$

Imaginons maintenant une autre ligne (C′) tangente à (C) en M ; pour cette ligne, au point M, $x, y, \frac{dy}{dx}$ sont les mêmes que pour (C), mais $\frac{d^2y}{dx^2}$ n'est pas la même ; le lieu du point m ne sera plus le même, cependant il passera par le point m relatif au point M considéré, mais aura en ce point une tangente mt', généralement différente de mt. Désignons par

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$$

la valeur de la dérivée seconde de y par rapport à x pour la courbe (C′) ; on a maintenant

$$\overline{Tt'} = \frac{(x-\alpha)y^2\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)}{\beta\frac{dy}{dx}};$$

donc $$\frac{\overline{Tt'}}{\overline{Tt}} = \frac{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)}{\frac{d^2y}{dx^2}}.$$

Soit ρ le rayon de courbure de (C) et ρ' celui de (C′) en M ; on a

$$\frac{1}{\rho} = \pm\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left\{1+\frac{dy^2}{dx^2}\right\}^{\frac{3}{2}}} \quad \text{et} \quad \frac{1}{\rho'} = \pm\frac{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)}{\left\{1+\frac{dy^2}{dx^2}\right\}^{\frac{3}{2}}};$$

donc $$\frac{\overline{Tt'}}{\overline{Tt}} = \pm\frac{\rho}{\rho'}. \qquad (4)$$

Il faut prendre + si le sens de la concavité est le même en M pour (C) et (C′) et — dans le cas contraire. Cette relation très simple est surtout remarquable en ce qu'elle est indépendante de la position de S et subsiste même si le point S s'éloigne à l'infini.

2. — *Lorsque* (C) *est une conique admettant pour axe de symétrie l'axe* Ox, *le lieu de* m *est une droite qui est la polaire de* S *par rapport à* (C).

L'équation de toute conique admettant pour axe Ox peut se mettre sous la forme

$$y^2 = 2px + qx^2,$$

si l'on prend convenablement l'origine laissée quelconque dans ce qui précède. On a donc

$$y\frac{dy}{dx} = p + qx;$$

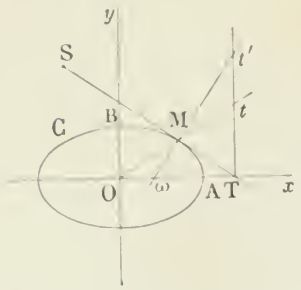
donc, en portant dans (1), on a $y_1 = \dfrac{2px + qx^2 - (x - \alpha)(p + qx)}{\beta}$

ou $\beta y_1 = p(x + \alpha) + q\alpha x,$

qui est bien l'équation de la polaire de $S(\alpha, \beta)$ par rapport à (C).

3. — *Construction nouvelle du rayon de courbure d'une conique.*

Le point S peut être pris quelconque; s'il est sur la tangente en M à (C), le point N et par suite m se confondent avec M. Considérons par exemple une ellipse (C) définie par ses deux demi-axes OA et OB en position et en grandeur. On sait construire un point quelconque de cette ellipse, la tangente et la normale en ce point. Prenons pour (C′) la circonférence ayant pour centre le point ω où la normale coupe l'un des axes OA et pour rayon ωM, puis imaginons que S soit à l'infini sur MT.



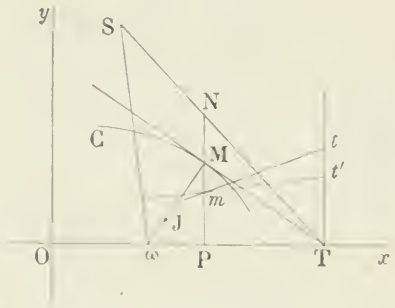
Le lieu des points m relatifs à (C) est la polaire de S par rapport à (C), c'est-à-dire le diamètre OM qui est à lui-même sa tangente, et celui qui est relatifs à (C′) est le diamètre ωM; donc, en vertu de (4), on a

$$\frac{\overline{Tt'}}{Tt} = \pm \frac{\rho}{\rho'} \qquad \text{et} \qquad \rho' = \omega M;$$

donc la construction d'une quatrième proportionnelle à trois lignes faciles à trouver, savoir, Tt, Tt', ωM, donne ρ, rayon de courbure de C en M.

4. — Considérons maintenant une courbe (C) pour laquelle on sait construire en chaque point la tangente, la normale et le rayon de courbure ρ ou MJ, on sait aussi construire m.

On prendra pour (C′) la circonférence ayant pour centre le point ω où la normale rencontre Ox et pour rayon ωM; le lieu des points m relatifs à cette circonférence est la polaire de S par rapport à cette circonférence, c'est-à-dire la perpendiculaire mt' abaissée de m sur ωS; elle est à elle-même sa tangente; on connaît donc simplement le point t'; pour avoir t et par suite mt, il suffit d'appliquer la relation



$$\frac{\overline{Tt'}}{Tt} = \pm \frac{MJ}{M\omega}$$

+ si MJ et Mω sont de même sens, — dans le cas contraire.

5. — Si la courbe (C) est la méridienne d'une surface de révolution ayant pour axe Ox, on voit sans peine que le lieu des points m est la projection sur le plan méridien passant par S de la ligne d'ombre propre de la surface éclairée par le point lumineux S; ce qui précède donne donc le moyen de construire la tangente à cette projection pour tout point m relatif à un point M pour lequel on connaît le rayon de courbure de (C) en grandeur et en direction, et par conséquent aussi la tangente au point correspondant de la ligne d'ombre tracée sur la surface.

E. Jablonski, professeur au lycée Charlemagne.

---

120. — *On donne deux axes rectangulaires et un cercle* C *passant par l'origine et dont le centre a pour coordonnées* $x = -\frac{a}{2}$, $y = \frac{b}{2}$. *Dans ce cercle on mène deux cordes de longueur* d, *passant par l'origine.*

D'un point de l'axe des x, *dont l'abscisse est* p, *on mène les droites perpendiculaires à ces cordes. Cela étant :*

1° On demande l'équation Δ *du lieu des points tels que le produit de leurs distances aux cordes soit dans un rapport donné* λ *avec le produit de leurs distances aux droites perpendiculaires à ces cordes et le lieu des centres des coniques représentées par l'équation* Δ *lorsque* λ *varie;*

2° On discutera la nature des coniques représentées par l'équation Δ.

3° Le rapport λ *étant choisi de façon que la conique* Δ *devienne un cercle, on demande de trouver le lieu du centre de ce cercle lorsque le centre du cercle* C *décrit l'hyperbole* $x^2 + nxy = \frac{d^2}{4}$.

(École Centrale, 2e session 1891.)

1°. — L'équation du cercle C est

$$x^2 + y^2 + ax + by = 0.$$

Coupons ce cercle par un cercle de centre O, de rayon d et dont l'équation est

$$x^2 + y^2 - d^2 = 0.$$

Nous aurons l'équation des deux cordes considérées en formant l'équation des droites joignant l'origine aux points de rencontre de ces deux cercles; pour cela nous rendons homogènes les deux équations et nous éliminons la variable d'homogénéité. On obtient ainsi le facteur $x^2 + y^2$, correspondant aux points cycliques, puis l'équation

$$d^2(x^2 + y^2) - (ax + by)^2 = 0,$$

qui est celle des deux cordes.

Soient t_1 et t_2 les coefficients angulaires de ces deux droites; ces nombres sont racines de l'équation

$$(d^2 - b^2)t^2 - 2abt + d^2 - a^2 = 0.$$

On peut écrire l'équation du lieu demandé sous la forme

$$\frac{\dfrac{(y - t_1x)(y - t_2x)}{\sqrt{(1 + t_1^2)(1 + t_2^2)}}}{\dfrac{(x + t_1y - p)(x + t_2y - p)}{\sqrt{(1 + t_1^2)(1 + t_2^2)}}} = \pm\lambda. \qquad (1)$$

Remplaçons $t_1 + t_2$ et t_1t_2 par $\frac{-2ab}{d^2 - b^2}$ et $\frac{d^2 - a^2}{d^2 - b^2}$; il vient

$$\frac{(d^2 - b^2)y^2 - 2abxy + (d^2 - a^2)x^2}{(d^2 - b^2)(x - p)^2 + 2aby(x - p) + (d^2 - a^2)y^2} = \pm\lambda.$$

L'énoncé semble indiquer que le nombre donné λ est positif; comme dans la relation (1) les radicaux sont précédés du double signe, nous l'avons laissé devant le nombre λ. Mais pour simplifier l'équation on peut supposer que le nombre λ peut être positif ou négatif et que sa valeur absolue seule représente le rapport considéré.

L'équation Δ peut alors s'écrire

$$(d^2 - a^2)x^2 - 2abxy + (d^2 - b^2)y^2 - \lambda[(d^2 - b^2)(x - p)^2 + 2aby(x - p) + (d^2 - a^2)y^2] = 0.$$

Prenons les équations qui déterminent le centre :

$$(d^2 - a^2)x - aby - \lambda[(d^2 - b^2)(x - p) + aby] = 0,$$

$$-abx + (d^2 - b^2)y - \lambda[ab(x - p) + (d^2 - a^2)y] = 0.$$

En éliminant λ entre ces deux équations on a le lieu du centre. On obtient l'équation

$$[(d^2 - a^2)x - aby][ab(x - p) + (d^2 - a^2)y] + [abx - (d^2 - b^2)y][(d^2 - b^2)(x - p) + aby] = 0,$$

qu'on peut écrire

$$x^2 + \frac{b^2 - a^2}{ab}xy - y^2 - px + \frac{(d^2 - b^2)^2 + a^2b^2}{ab(2d^2 - a^2 - b^2)}y = 0,$$

en remarquant que $2d^2 - a^2 - b^2$ est positif, puisque d est une corde d'un cercle de diamètre $\sqrt{a^2+b^2}$.

On voit ainsi que le lieu est une hyperbole équilatère passant par l'origine et le point $(p,0)$.

Ces résultats pouvaient s'obtenir immédiatement en observant que *le lieu des points tels que le rapport des produits des distances de ces points à deux côtés opposés d'un quadrilatère aux produits des distances aux deux autres côtés est une conique circonscrite au quadrilatère.*

Le lieu Δ est donc une conique passant par les points de rencontre des deux cordes et des deux perpendiculaires issues du point $(p,0)$.

En outre, le lieu des centres de ces coniques est une conique, dite *conique des neuf points*, ainsi nommée parce qu'elle passe par les points de concours des diagonales et les milieux des droites joignant les quatre sommets deux à deux. Cette conique est une ellipse, si le quadrilatère est concave, une hyperbole, s'il est convexe. Or, le quadrilatère formé par les cordes et deux perpendiculaires est convexe, donc le lieu des centres est une hyperbole.

2°. — Le discriminant de l'ensemble des termes du second degré de la conique Δ est

$$[d^2 - a^2 - \lambda(d^2 - b^2)][d^2 - b^2 - \lambda(d^2 - a^2)] - [ab + \lambda ab]^2$$

ou $$\lambda^2[(d^2 - a^2)(d^2 - b^2) - a^2b^2] - \lambda[(d^2 - a^2)^2 + (d^2 - b^2)^2 + 2a^2b^2] + (d^2 - a^2)(d^2 - b^2) - a^2b^2$$

ou $$\lambda^2 - \left[\frac{d^2 - a^2 - b^2}{d^2} + \frac{d^2}{d^2 - a^2 - b^2}\right]\lambda + 1;$$

on voit ainsi que les racines de ce trinome sont $\dfrac{d^2 - a^2 - b^2}{d^2}$ et $\dfrac{d^2}{d^2 - a^2 - b^2}$. Si donc λ est extérieur à ces racines, le trinome est positif, la conique Δ est une hyperbole; si λ est compris entre ces nombres, la conique est une ellipse, et enfin si λ est égal à l'un de ces nombres, la conique est une parabole. Il y a donc deux paraboles passant par les quatre points considérés, ce qui était à prévoir.

Parmi ces coniques, il y aura un couple de deux droites réelles, ce sont les diagonales du quadrilatère considéré; on aura la valeur de λ correspondante en annulant le discriminant de la forme obtenue en rendant homogène le premier membre de l'équation Δ.

3°. — Pour que l'équation Δ représente un cercle, il faut que $\lambda = -1$. On obtient alors l'équation

$$(x^2 + y^2)(2d^2 - a^2 - b^2) - 2px(d^2 - b^2) - 2abpy + (d^2 - b^2)^2p^2 = 0.$$

Le centre de ce cercle est déterminé par les équations

$$x(2d^2 - a^2 - b^2) - p(d^2 - b^2) = 0, \qquad (2)$$

$$y(2d^2 - a^2 - b^2) - abp = 0. \qquad (3)$$

On a en outre la relation $$a^2 + nab - d^2 = 0. \qquad (4)$$

En éliminant a et b entre les équations (2), (3) et (4) on aura l'équation du lieu.

Multiplions les équations (2) et (3) respectivement par 1 et $+n$, puis ajoutons :

$$(x + ny)(2d^2 - a^2 - b^2) - p[d^2 - b^2 + nab] = 0.$$

En remplaçant nab par sa valeur tirée de (4) il vient

$$(x + ny - p)(2d^2 - a^2 - b^2) = 0.$$

Le lieu est donc une droite ayant pour équation

$$x + ny - p = 0;$$

elle passe par le point $(p,0)$ et est parallèle à une asymptote de l'hyperbole donnée.

E. Bourrienne, à Rouen.

Ont résolu la même question : MM. E. Guedes (Saint-Louis); L. Hallard (lycée de Bordeaux); L. Perrée (Condorcet).

QUESTIONS POSÉES AUX EXAMENS ORAUX

École des mines de Saint-Étienne (1891).

18. — Dérivées des fonctions

$$\frac{\sqrt{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}}{\sqrt{\sin x+\cos x}}, \qquad (\cos x)^{\frac{1}{2\sin^2\frac{x}{2}}}, \qquad \frac{L\sqrt{\frac{\cos\frac{x}{3}}{\sin\frac{x}{2}}}}{\operatorname{tg}\frac{x}{7}}.$$

19. — Limites des fonctions

$$\left(\frac{\cos x+x+\sin x}{1+\cos x}\right)^{\operatorname{cotg} x}, \qquad \frac{L\operatorname{tg} px}{L\operatorname{tg} x}, \qquad \frac{e^x-e^{\sin x}}{x-\sin x}, \qquad x^{x^{x^{\sin x}}} \text{ pour } x=0.$$

20. — Limite de $m(\sqrt[m]{a}-1)$ quand m augmente indéfiniment.

21. — Étudier les racines des équations

$$x^4+x^3+1=0, \qquad x^4-2x^2+x+1=0, \qquad x^4+3x^3-2x+1=0, \qquad x^4-x^3+2x+1=0.$$

22. — Construire les courbes :

(I) $y^4+x^2y^2+2y^3-x^3=0$;

(II) $y=tx, \quad x=\frac{1+t^2}{1-t^3}$;

(III) $x=\frac{1-2t^3}{t^2(t^2-1)}, \quad y=\frac{1-2t^3}{t(t^2-1)}$;

(IV) $\sin y=3\sin x$;

(V) $y=e^x+e^{-x}-2(x^2-1)$;

(VI) $\omega=\frac{\rho^3-1}{\rho^2+\rho}$;

(VII) $\rho^2=3\sin^2\omega+2\sin\omega-1$;

(VIII) $\rho=a-b\omega+\frac{c}{\omega-1}$;

(IX) $\rho^2-2\rho\cos\frac{\omega}{3}-1=0$;

(X) $\rho^2\cos\frac{\omega}{4}-2\rho+1=0$.

23. — Lieu des foyers des paraboles tangentes à deux droites, et dont l'axe a une direction fixe.

24. — Lieu des milieux des normales à une ellipse.

25. — Lieu des sommets des ellipses passant par trois points donnés et dont les axes sont donnés en direction.

26. — Équation générale des coniques ayant un point F pour foyer et un point B pour extrémité du petit axe.

27. — Ecrire que la droite $ux+vy+w=0$ est axe de la conique $f(x, y)=0$.

28. — Exposer la théorie des asymptotes sur l'exemple

$$x^3y+xy^3-x^2y+xy^2+x-y+1=0.$$

29. — Trouver la perpendiculaire commune aux deux droites

$$\begin{cases} y=mx \\ z=0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} z=py+a \\ x=qz. \end{cases}$$

30. — On donne les deux droites $\frac{x}{\alpha}=\frac{y}{\beta}=\frac{z}{\gamma}$ et $\frac{x}{\alpha'}=\frac{y}{\beta'}=\frac{z}{\gamma'}$; trouver les équations des bissectrices de ces deux droites.

31. — Une droite reste parallèle à un plan donné et s'appuie sur deux droites données. Lieu des points qui la divisent dans un rapport donné.

32. — On donne trois axes rectangulaires Ox, Oy, Oz. Trouver l'équation d'un plan passant par Oy et faisant 30° avec le plan xoy. Équation d'une normale à ce plan. Équation d'un cône ayant cette droite pour axe et dont le demi-angle au sommet est de 30°.

QUESTIONS PROPOSÉES

134. — On donne dans un plan deux coniques S, S′ et deux points P, Q; on mène de ces points des tangentes aux deux coniques. Soient A et B deux des points d'intersection des tangentes à S issues de P et Q (non situés sur une même tangente) et soient A′ et B′ deux points analogues relatifs à S′.

1° Il existe une conique Σ tangente aux droites AB′, B′B, BA′, A′A et inscrite dans le quadrilatère formé par les tangentes communes aux coniques S, S′.

2° Le point P étant fixe, quel lieu doit décrire le point Q pour que la conique Σ reste invariable?

3° Examiner le cas où le point P est l'un des points communs à S et S′.

(Maluski.)

135. — Soient A, B et C, D deux couples de sommets opposés d'un quadrilatère circonscrit à un cercle. Trouver le lieu des points de rencontre des tangentes communes aux coniques ayant pour foyers A et B et aux coniques ayant pour foyers C et D.

(A. Durand.)

136. — Calculer la valeur de l'intégrale

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{Log} \sin \theta \, . \, d\theta.$$

(Audibert, à Marseille.)

137. — Démontrer que l'équation

$$x^n + \frac{n^p}{1^q} a x^{n-1} + \frac{\overline{n(n-1)}^p}{(2!)^q} a^2 x^{n-2} + \frac{\overline{n(n-1)(n-2)}^p}{(3!)^q} a^3 x^{n-3} + \ldots + \frac{(n!)^p}{(n!)^q} a^n = 0$$

a toutes ses racines réelles.

(Audibert.)

138. — On donne la courbe du troisième degré définie par l'équation

$$x^3 = 3ay^2$$

(axes rectangulaires).

On peut lui mener d'un point P trois tangentes. On considère le cercle C passant par les trois points de contact. Trouver le lieu que doit décrire le point P :

1° Pour que le rayon du cercle C soit constant ;

2° Pour que le centre du cercle C soit sur la cubique ;

3° Pour que le cercle C soit tangent à la cubique (1).

***139.** — On donne la courbe représentée par l'équation

$$y = x^3$$

(axes rectangulaires.)

On mène à cette courbe des tangentes par un point P.

1° Trouver dans quelle région doit se trouver le point P pour que les tangentes soient réelles ;

2° Trouver l'équation du cercle C passant par les points de contact ;

3° Lieu du point P quand le cercle C passe par l'origine.

***140.** — On considère toutes les circonférences C pour lesquelles le point P est le pôle de la droite D.

1° Les axes radicaux des circonférences C et d'une circonférence donnée C′ passent par un point fixe A ;

2° Lieu du point A quand la circonférence C′ varie.

(Vve F. Prime, à Bruxelles.)

***141.** — On donne un angle constant de sommet A et un point fixe B dans le plan de cet angle. On considère un cercle variable passant par A et B ; il coupe les côtés de l'angle A en D et E.

1° Lieu du point M divisant le segment DE dans un rapport donné ;

2° Lieu du pôle Q de la droite DE par rapport au cercle ;

3° Étudier la variation de l'angle ωBQ, ω désignant le centre du cercle ;

4° Lieu du pied de la perpendiculaire abaissée du point B sur la droite ωQ.

(F. Pradet, à Toulouse.)

(1) Cette question a été résolue autrefois dans les *Nouvelles Annales*. Nous recommandons à nos lecteurs de construire avec soin les courbes qu'ils obtiendront.

Le Rédacteur-Gérant : H. VUIBERT.

PARIS — IMP. CHAIX. — 2146-1-92.

2e Année. N° 6. Mars 1892.

REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

ALGÈBRE

SUR LE DÉVELOPPEMENT DES RACINES CARRÉES EN FRACTIONS CONTINUES

Par **M. V. Jamet.**

Le sujet de cette note est contenu implicitement dans un mémoire de mon regretté collègue Ed. Lucas, sur les fonctions arithmétiques (*Nouvelle Correspondance mathématique*, tomes 3 et 4). Le but que je me suis proposé est celui-ci : former, au moyen des fractions continues, deux suites, l'une croissante, l'autre décroissante, ayant pour limite commune la racine carrée d'un nombre entier, et évaluer une limite supérieure de l'erreur commise en adoptant un terme pris dans l'une de ces deux suites, comme valeur de la racine.

Soit a la racine, à une unité près, du nombre donné, r le reste, tel qu'on l'entend en arithmétique. En se reportant à la théorie générale des fractions continues (voir par, exemple, Laurent, *Traité d'algèbre*, p. 341 à 344 de la deuxième édition), on voit que la fraction

$$a + \cfrac{r}{2a + \cfrac{r}{2a + \cfrac{r}{2a + \dots}}} \tag{1}$$

est convergente, car l'expression

$$\frac{r^{n+1}}{(4a^2)^n \times 2a} \tag{2}$$

tend vers zéro, quand n est de plus en plus grand, en vertu de la relation $r \leqslant 2a$. La limite de cette fraction est la racine carrée du nombre donné, car la relation

$$z = a + \cfrac{r}{2a + \cfrac{r}{2a + \cfrac{r}{2a + \dots}}}$$

équivaut à celle-ci:

$$z = a + \frac{r}{z + a},$$

d'où l'on déduit :

$$z = \sqrt{a^2 + r}.$$

D'autre part, si l'on désigne les réduites successives de l'expression (1) par $\frac{P_0}{Q_0}, \frac{P_1}{Q_1}, \frac{P_2}{Q_2}, \dots$ l'expression (2) est, comme on sait, supérieure à l'excès de deux réduites successives $\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}, \frac{P_n}{Q_n}$. Elle permet donc d'évaluer la limite supérieure de l'erreur commise, soit par excès, soit par défaut, en

adoptant l'une ou l'autre de ces deux réduites comme valeur approchée. ($\frac{P_n}{Q_n}$ sera approchée par défaut, par exemple, si n est pair, et, dans ce cas, $\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}$ sera approchée par excès). Il nous reste donc à développer P_{n+1}, Q_{n+1} en fonctions entières de a et de r.

A cet effet, considérons la formule de récurrence

$$P_{n+1} = 2aP_n + r.P_{n-1}, \tag{3}$$

et observons que, si l'on appelle x_1, x_2 les racines de l'équation

$$x^2 = 2ax + r,$$

elle sera vérifiée, quel que soit l'entier p, si l'on fait

$$P_{n+1} = x_1^{n+1+p}, \qquad \text{ou} \qquad P_{n+1} = x_2^{n+1+p}.$$

On doit donc s'attendre à trouver, d'une manière générale,

$$P_n = \alpha x_1^{n+p} + \beta x_2^{n+p},$$

α, β désignant des nombres indépendants de n, p un nombre entier. Effectivement, on a

$$P_0 = a = \frac{x_1 + x_2}{2}, \qquad P_1 = 2a^2 + r = \frac{(x_1 + x_2)^2}{2} - x_1x_2 = \frac{x_1^2 + x_2^2}{2},$$

$$P_2 = 2aP_1 + rP_0 = \frac{(x_1 + x_2)(x_1^2 + x_2^2)}{2} - \frac{x_1x_2(x_1 + x_2)}{2} = \frac{x_1^3 + x_2^3}{2}.$$

Il est donc *très probable* que l'on a, en général,

$$P_n = \frac{x_1^{n+1} + x_2^{n+1}}{2}, \tag{4}$$

et pour mettre hors de doute l'exactitude de cette dernière formule, il suffit de faire voir que si elle est vraie pour une certaine valeur de n et pour toute valeur inférieure, elle entraîne la conséquence suivante :

$$P_{n+1} = \frac{x_1^{n+2} + x_2^{n+2}}{2}.$$

Dans ce but, on substituera, dans la formule (3), les valeurs de P_n et de P_{n-1}, déduites de la formule (4), et l'on trouvera :

$$P_{n+1} = a(x_1^{n+1} + x_2^{n+1}) + \frac{r}{2}(x_1^n + x_2^n) = \frac{(x_1 + x_2)(x_1^{n+1} + x_2^{n+1}) - x_1x_2(x_1^n + x_2^n)}{2}$$

$$P_{n+1} = \frac{x_1^{n+2} + x_2^{n+2}}{2}, \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Cela posé, des formules

$$x_1 = a + \sqrt{a^2 + r}, \qquad x_2 = a - \sqrt{a^2 + r}, \tag{5}$$

et de la formule (4), on déduira

$$P_n = a^{n+1} + \frac{(n+1)n}{1.2}a^{n-1}(a^2 + r) + \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{1.2.3.4}a^{n-3}(a^2 + r)^2 + \ldots$$

Les dénominateurs Q_0, Q_1, Q_2... obéissent aussi à la loi de récurrence :

$$Q_{n+1} = 2aQ_n + rQ_{n-1},$$

et l'on a aussi, pour exprimer Q_n, une formule telle que celle-ci :

$$Q_n = \alpha x_1^{n+p} + \beta x_2^{n+p}.$$

La détermination des nombres α, β, p, est aussi simple que précédemment.

On trouve, successivement

$$Q_0 = 1 = \frac{x_1 - x_2}{2\sqrt{a^2 + r}}, \qquad Q_1 = 2a = \frac{x_1^2 - x_2^2}{2\sqrt{a^2 + r}},$$

$$Q_2 = 2aQ_1 + rQ_0 = \frac{(x_1 + x_2)(x_1^2 - x_2^2)^2 - x_1x_2(x_1 - x_2)}{2\sqrt{a^2 + r}} = \frac{x_1^3 - x_2^3}{2\sqrt{a^2 + r}},$$

et, comme précédemment, on démontrera la formule générale :

$$Q_n = \frac{x_1^{n+1} - x_2^{n+1}}{2\sqrt{a^2 + r}},$$

puis, par les formules (5),

$$Q_n = \frac{n+1}{1} a^n + \frac{(n+1)n(n-1)}{1.2.3} a^{n-2}(a^2 + r) + \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4.5} a^{n-4}(a^2 + r)^2 + \ldots$$

Donc enfin

$$\sqrt{a^2 + r} = \frac{a^{n+1} + \frac{(n+1)n}{1.2} a^{n-1}(a^2 + r) + \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{1.2.3.4} a^{n-3}(a^2 + r)^2 + \ldots}{\frac{n+1}{1} a^n + \frac{(n+1)n(n-1)}{1.2.3} a^{n-2}(a^2 + r) + \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4.5} a^{n-4}(a^2 + r)^2 + \ldots}$$

à $\frac{r^{n+1}}{2^{2n+1}a^{2n+1}}$ près, par défaut, si n est pair, par excès, si n est impair.

---

118. — *Résoudre l'équation du troisième degré*

$$x^3 + px + q = 0,$$

sachant que l'une des racines est la somme des inverses des deux autres; trouver la condition qui doit exister entre les coefficients p *et* q *pour qu'il en soit ainsi. Application à l'équation*

$$x^3 - 5x + 2 = 0.$$

(École des Ponts et Chaussées, cours préparatoires 1891.)

Soient x_1, x_2, x_3 les trois racines de l'équation

$$x^3 + px + q = 0,$$

et supposons que l'une d'elles, x_1 par exemple, soit égale à la somme des inverses des deux autres, de sorte que

$$x_1 = \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}$$

ou bien

$$x_1 = \frac{x_2 + x_3}{x_2x_3}$$

ou encore

$$x_1x_2x_3 = x_2 + x_3. \qquad (1)$$

Mais

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0 \qquad (2)$$

et

$$x_1x_2x_3 = -q; \qquad (3)$$

donc, on a

$$x_1 = q,$$

et par suite

$$q^3 + pq + q = 0,$$

c'est-à-dire

$$q(q^2 + p + 1) = 0.$$

et, en supposant $q \neq 0$,

$$q^2 + p + 1 = 0. \qquad (4)$$

Pour obtenir les deux autres racines, en supposant cette relation vérifiée, divisons $x^3 + px + q$ par $x - q$; on a pour quotient, en tenant compte de la relation (4),

$$x^2 + qx - 1.$$

L'équation
$$x^2 + qx - 1 = 0$$
a pour racines
$$x = \frac{-q \pm \sqrt{q^2 + 4}}{2}.$$

Si l'on suppose q réel, les racines sont réelles; on vérifie d'ailleurs, en considérant l'équation aux inverses
$$x^2 - qx + 1 = 0,$$
que la somme des inverses des deux dernières racines de l'équation proposée est bien égale à q.

Si l'on suppose $q = 0$, on a l'équation $x^3 + px = 0$, qui a une racine nulle et deux racines égales et de signes contraires; la somme des inverses de ces deux dernières racines est bien égale à zéro, et la condition $q = 0$ est suffisante. Mais pour que les racines soient toutes réelles, il faut supposer dans ce cas $p < 0$.

Exemple : l'équation $x^3 - 5x + 2 = 0$
jouit de la propriété précédente, ses racines sont 2, et $-1 \pm \sqrt{2}$.

R. Lévy (lycée Janson-de-Sailly).

Ont résolu la même question : MM. Audoin, lycée d'Augouléme; Bergman, Saint-Louis; Bourrienne, à Rouen; Louis Bros, à Saint-Girons; D. Cot, lycée de Poitiers; F. Dupuy, lycée de Rochefort; F. Faure, lycée de Grenoble; Gazagne, lycée de Lyon; Gérard, Saint-Louis; Gufden, Saint-Louis; James Hais, lycée Hoche; J. Fitte, lycée de Toulouse; R. Leheup, lycée de Rouen; L. Perrée, Condorcet; Louis Salle, lycée d'Alger; Vazou, professeur au collège de Falaise; G. B. Verrina, à Voltri; C. Wavrant, maître répétiteur au collège de Draguignan.

---

127. — *Prouver que la condition nécessaire et suffisante pour que la forme biquadratique*
$$f(x, y) \equiv A_0x^4 + 4A_1x^3y + 6A_2x^2y^2 + 4A_3xy^3 + A_4y^4$$
soit la somme des quatrièmes puissances de deux formes linéaires, est la suivante :
$$\Delta = \begin{vmatrix} A_0 & A_1 & A_2 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ A_2 & A_3 & A_4 \end{vmatrix} = 0.$$

C'est aussi la condition pour que le faisceau $f(x, y) = 0$ *soit harmonique. Montrer directement que les deux questions se ramènent l'une à l'autre.*

1° *La condition est nécessaire.* — En effet, supposons que l'on ait
$$A_0x^4 + 4A_1x^3y + 6A_2x^2y^2 + 4A_3xy^3 + A_4y^4 \equiv (\alpha x + \beta y)^4 + (\alpha' x + \beta' y)^4;$$
on en déduit
$$\left.\begin{aligned} A_0 &= \alpha^4 + \alpha'^4 \\ A_1 &= \alpha^3\beta + \alpha'^3\beta' \\ A_2 &= \alpha^2\beta^2 + \alpha'^2\beta'^2 \\ A_3 &= \alpha\beta^3 + \alpha'\beta'^3 \\ A_4 &= \beta^4 + \beta'^4 \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

On peut toujours déterminer trois nombres, m, n, p tels que
$$m\alpha^2 + n\alpha\beta + p\beta^2 = 0,$$
$$m\alpha'^2 + n\alpha'\beta' + p\beta'^2 = 0;$$
multiplions alors les trois premières relations du système (1) par m, n, p respectivement, et ajoutons :

faisons de même pour les trois intermédiaires, puis pour les trois dernières; on obtient

$$\left.\begin{aligned} mA_0 + nA_1 + pA_2 &= 0 \\ mA_1 + nA_2 + pA_3 &= 0 \\ mA_2 + nA_3 + pA_4 &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

donc le déterminant Δ est nul.

2° *La condition est suffisante.* — Supposons $\Delta = 0$; on peut alors déterminer trois nombres non tous nuls, m, n, p satisfaisant aux relations (2). Remarquons d'abord que si l'on suppose $m = 0$ et $p = 0$, n étant différent de zéro, les relations (2) donnent $A_1 = 0$, $A_2 = 0$, $A_3 = 0$, et par suite

$$f(x, y) \equiv A_0x^4 + A_4y^4;$$

la forme est bien alors la somme de deux quatrièmes puissances. On peut donc, en écartant ce cas particulier, supposer que l'un au moins des deux nombres m, p, soit par exemple p, est différent de zéro.

Or le trinome $mx^2 + nxy + py^2$ s'annule pour deux systèmes de valeurs de x et de y, les valeurs de chaque système étant déterminées à un facteur arbitraire près. Soient u, v et u', v' deux systèmes de solutions ; on aura

$$\left.\begin{aligned} mu^2 + nuv + pv^2 &= 0, \\ mu'^2 + nu'v' + pv'^2 &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Déterminons deux nombres λ et λ' tels que

$$A_0 = \lambda u^4 + \lambda' u'^4, \qquad (4)$$

$$A_1 = \lambda u^3 v + \lambda' u'^3 v'. \qquad (5)$$

Ajoutons ces relations membre à membre après les avoir multipliées respectivement par m et n; il vient, en tenant compte de (2) et (3),

$$pA_2 = (\lambda u^2 v^2 + \lambda' u'^2 v'^2)p,$$

et comme $p \neq 0$,

$$A_2 = \lambda u^2 v^2 + \lambda' u'^2 v'^2. \qquad (6)$$

Ajoutons de même (5) et (6) respectivement multipliées par m et n; on en déduit

$$A_3 = \lambda uv^3 + \lambda' u'v'^3, \qquad (7)$$

et enfin

$$A_4 = \lambda v^4 + \lambda' v'^4. \qquad (8)$$

Remplaçons dans $f(x, y)$ les coefficients par leurs valeurs tirées des relations (4), (5), (6), (7) et (8); on a

$$f(xy) \equiv \lambda(ux + vy)^4 + \lambda'(u'x + v'y)^4.$$

Le théorème est démontré.

Cas d'exception. — Pour que cette démonstration subsiste, il faut qu'on puisse résoudre les équations (4) et (5) par rapport à λ et λ', c'est-à-dire que

$$(uv' - vu') \neq 0,$$

car ni u ni u' ne peuvent être nuls puisque $p \neq 0$.

Cette condition exige que le trinome $mx^2 + nxy + py^2$ ne soit pas carré parfait, c'est-à-dire que $n^2 - 4mp \neq 0$.

Dans le cas où $n^2 - 4mp = 0$, la démonstration n'a plus lieu et il est aisé de voir que dans cette hypothèse la forme n'est pas réductible à une somme de deux quatrièmes puissances.

Si en effet on suppose

$$mx^2 + nxy + py^2 \equiv (\alpha x + \beta y)^2,$$

on en déduit

$$m = \alpha^2, \qquad n = 2\alpha\beta, \qquad p = \beta^2$$

et les relations (2) deviennent

$$A_0\alpha^2 + 2A_1\alpha\beta + A_2\beta^2 = 0,$$
$$A_1\alpha^2 + 2A_2\alpha\beta + A_3\beta^2 = 0,$$
$$A_2\alpha^2 + 2A_3\alpha\beta + A_4\beta^2 = 0.$$

Elles montrent que les dérivées $f''_{x^2}, f''_{xy}, f''_{y^2}$ ont un facteur linéaire commun; par suite, la forme $f(x, y)$ admet un facteur triple, de sorte que

$$f(x, y) \equiv (\beta x - \alpha y)^3(ux + vy).$$

Dans ces conditions, $f(x, y)$ ne peut être réduite à une somme de deux quatrièmes puissances, car dans ce cas elle serait décomposable en un produit de quatre facteurs distincts.

La théorie des racines égales nous montre que α et β ainsi que u et v sont des fonctions entières et rationnelles des coefficients de $f(x, y)$; cette forme est donc *réductible*, c'est-à-dire décomposable en un produit de deux facteurs dont les coefficients s'expriment rationnellement en fonction des coefficients de la forme donnée. On doit donc considérer la réciproque comme établie dans le cas d'une forme biquadratique *irréductible*.

On sait que $\Delta = 0$ est la condition nécessaire et suffisante pour que le faisceau de droite représenté par l'équation $f(x, y) = 0$ soit harmonique (B. Niewenglowski, *Algèbre*, tome II, p. 251). Il est aisé de voir que les deux questions se ramènent l'une à l'autre. En effet, si le faisceau est harmonique, on a, en désignant par P et Q deux fonctions linéaires,

$$f(x, y) \equiv PQ\,(P + Q)\,(P - Q)$$

ou

$$f(x, y) \equiv PQ\,(P^2 - Q^2).$$

Si l'on pose $Q = iR$, on peut écrire

$$f(x, y) \equiv iPR\,(P^2 + R^2).$$

Or

$$PR\,(P^2 + R^2) \equiv \frac{1}{8}(P + R)^4 - \frac{1}{8}(P - R)^4.$$

donc

$$f(x, y) \equiv \frac{i}{8}(P - iQ)^4 - \frac{i}{8}(P + iQ)^4.$$

Réciproquement, soit $f(x, y) \equiv P^4 - Q^4 = (P^2 + Q^2)(P^2 - Q^2)$.

Posons

$$P + Q = R \qquad P - Q = iS;$$

il vient

$$f(x, y) \equiv \frac{i}{2}(R^2 - S^2)\,RS,$$

ce qui montre que le faisceau est harmonique.

[Les solutions envoyées ne sont pas complètes.]

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

107. — *Deux tores dont l'un a pour méridienne la section de l'autre par un plan bitangent, se coupent suivant deux cercles, et, en outre, suivant une courbe plane dont le plan est perpendiculaire au plan des deux axes.*

Prenons pour origine le centre d'un des tores et pour axe des z, l'axe de ce tore. Son équation sera

$$(x^2 + y^2 + z^2 + a^2 - R^2)^2 - 4a^2(x^2 + y^2) = 0. \qquad (1)$$

Menons un plan quelconque par le centre; on peut toujours le supposer perpendiculaire au plan des xz; soit

$$x = mz \qquad (2)$$

son équation. Cherchons l'équation de la surface déterminée par la rotation de la section du tore par ce plan autour de la projection de l'axe du tore sur le plan sécant.

Un parallèle de cette surface aura pour équations

$$x^2 + y^2 + z^2 = \lambda, \tag{3}$$

$$mx + z = \mu. \tag{4}$$

Ecrivons que ce parallèle rencontre la courbe définie par les équations (1) et (2) : pour cela éliminons x, y, z entre (1), (2), (3) et (4). L'équation (1) donne

$$(\lambda + a^2 - R^2)^2 - 4a^2(\lambda - z^2) = 0. \tag{5}$$

Les équations (2) et (4) donnent $$(m^2 + 1)z = \mu; \tag{6}$$

éliminant z entre (5) et (6), on obtient la condition

$$(\lambda + a^2 - R^2)^2 - 4a^2\left[\lambda - \frac{\mu^2}{(m^2 + 1)^2}\right] = 0.$$

Par suite l'équation de la surface est

$$(x^2 + y^2 + z^2 + a^2 - R^2)^2 - 4a^2\left[x^2 + y^2 + z^2 - \frac{(mx + z)^2}{(m^2 + 1)^2}\right] = 0. \tag{7}$$

L'intersection de cette surface et du tore se trouve sur la surface définie par l'équation

$$4a^2(x^2 + y^2) - 4a^2\left[x^2 + y^2 + z^2 - \frac{(mx + z)^2}{(m^2 + 1)^2}\right] = 0,$$

obtenue en retranchant membre à membre les équations (1) et (7) ou

$$(mx + z)^2 - (m^2 + 1)^2 z^2 = 0$$

ou encore $$[mx + z + (m^2 + 1)z]\,[mx + z - (m^2 + 1)z] = 0.$$

ou enfin $$m(x - mz)\,[mx + (m^2 + 2)z] = 0.$$

Par suite, l'intersection se compose de deux courbes planes, situées dans les plans ayant pour équations : $x - mz = 0$, (ce qui était évident a priori)

et $$mx + (m^2 + 2)z = 0.$$

qui représente un plan perpendiculaire au plan des xz, c'est-à-dire au plan des axes des deux surfaces.

Si le plan $x = mz$ est bitangent au tore, on a le théorème énoncé.

L. P. Randon, (lycée Louis-le-Grand.)

[M. F. Faure, à Valence, a résolu la même question.]

---

110. — A *et* B *sont les foyers d'une ellipse fixe* E. *Une conique* C *ayant un de ses foyers au point* A *touche l'ellipse et passe par le point* B.

On demande de trouver par l'analyse et la géométrie :

1° Le lieu du second foyer de la conique C;

2° Le lieu des extrémités du grand axe de cette courbe.

(Ecole des mines de Saint-Étienne, 1891.)

SOLUTION ANALYTIQUE

Prenons deux axes rectangulaires passant par le point A, AB étant la direction positive de l'axe des x, et désignons par $2a$, $2b$ et $2c$ les longueurs des axes et la distance focale de l'ellipse E. L'équation de cette courbe peut s'écrire

$$x^2 + y^2 = \left(\frac{c}{a}x + \frac{b^2}{a}\right)^2.$$

Soit maintenant $$x^2 + y^2 = (lx + my + h)^2 \qquad (1)$$
l'équation d'une conique C ayant pour foyer le point A. En retranchant ces deux équations, on obtient

$$\left(\frac{c}{a}x + \frac{b^2}{a}\right)^2 - (lx + my + h)^2 = 0,$$

équation qui représente les deux cordes communes aux deux coniques qui passent par le point de rencontre des directrices, et pour que les deux coniques soient tangentes, il faut et il suffit que l'une de ces cordes soit tangente à l'ellipse E.

Considérons la corde qui a pour équation

$$\left(\frac{c}{a} + l\right)x + my + \frac{b^2}{a} + h = 0;$$

pour écrire qu'elle est tangente à l'ellipse, je transporte l'origine au centre $(c, 0)$ de cette courbe et j'utilise la condition connue

$$a^2u^2 + b^2v^2 - w^2 = 0.$$

L'équation de la corde devient

$$\left(\frac{c}{a} + l\right)x + my + lc + h + a = 0.$$

et nous devons avoir $$(al + c)^2 + b^2m^2 = (lc + h + a)^2,$$

relation qui peut s'écrire

$$b^2(l^2 + m^2 - 1) - h(2lc + h + 2a) = 0\,. \qquad (2)$$

En écrivant que l'autre corde est tangente à l'ellipse, on obtiendrait une relation qui se déduirait de (2), en changeant les signes de l, m et h. Mais comme l'équation (1) ne se modifie pas par un tel changement de signes, on peut se borner à considérer la relation (2).

Il faut encore écrire que la conique C passe par le point B, ce qui donne

$$4c^2 = (2lc + h)^2$$

ou $$2lc + h = 2c\varepsilon\,, \qquad (3)$$

en posant $\varepsilon = \pm 1$; et cela nous permet d'écrire la relation (2) sous la forme

$$b^2(l^2 + m^2 - 1) - 2h(a + c\varepsilon) = 0\,,$$

ou, en observant que $$b^2 = a^2 - c^2\,,$$

$$(a - c\varepsilon)(l^2 + m^2 - 1) - 2h = 0\,. \qquad (4)$$

L'équation (1) peut donc être considérée comme l'équation générale des coniques C, les paramètres l, m, h satisfaisant aux conditions (3) et (4).

En outre, il est aisé de voir que si $\varepsilon = +1$, la conique est une hyperbole, et si $\varepsilon = -1$, la conique est une ellipse.

En effet, le genre de la conique est donné par le signe de $l^2 + m^2 - 1$, ou celui de h d'après ou celui de $\varepsilon - l$ d'après (3). Mais de (4) on tire

$$(a - c\varepsilon)m^2 = (a - c\varepsilon)(1 - l^2) + 4c(\varepsilon - l) = (\varepsilon - l)[(a - c\varepsilon)(\varepsilon + l) + 4c].$$

Or, l devant rendre le second membre positif, doit être compris entre les racines ε et $-\dfrac{a\varepsilon + 3c}{a - c\varepsilon}$.

Or, si $\varepsilon = +1$, on a $$\varepsilon > -\frac{a\varepsilon + 3c}{a - c\varepsilon}\,;$$

on doit donc avoir $\varepsilon > l$, par suite $l^2 + m^2 - 1 > 0$, et la conique est une hyperbole.

Si $\varepsilon = -1$, on a $$\varepsilon < -\frac{a\varepsilon + 3c}{a - c\varepsilon}\,;$$

par suite, on doit avoir $\varepsilon < l$, ou $l^2 + m^2 - 1 < 0$, et la conique est une ellipse.

1°. — Pour avoir les coordonnées du deuxième foyer de la conique C, je cherche les coordonnées du centre en résolvant les équations

$$x = l(lx + my + h),$$
$$y = m(lx + my + h),$$

d'où l'on déduit sans peine

$$x = \frac{-lh}{l^2 + m^2 - 1}, \qquad y = \frac{-mh}{l^2 + m^2 - 1};$$

ou, en y remplaçant $l^2 + m^2 - 1$ par sa valeur tirée de (4), et doublant ces coordonnées, on a celles du foyer

$$x = -l(a - c\varepsilon), \qquad y = -m(a - c\varepsilon). \tag{5}$$

En éliminant l, m, h entre (3), (4) et (5) on aura l'équation du lieu. De (3) je tire la valeur de h et je remplace dans (4); il vient

$$(a - c\varepsilon)(l^2 + m^2) + 4cl - (a - c\varepsilon) - 4c\varepsilon = 0.$$

En remplaçant dans cette relation l et m par leurs valeurs tirées de (4), on obtient, toutes réductions faites,

$$(x - 2c)^2 + y^2 = (a + c\varepsilon)^2.$$

Le lieu se compose donc de deux cercles ayant pour centre le point B et pour rayons $a \pm c$.

Le cercle de rayon $a + c$ contient les foyers des coniques C qui sont des hyperboles; le cercle de rayon $a - c$ contient les foyers d'ellipses.

Remarquons aussi que les centres de ces coniques décrivent deux cercles qui ont pour centre le milieu O de AB et dont les rayons sont égaux à $\frac{a \pm c}{2}$.

2°. — Nous allons montrer que la longueur de l'axe focal des coniques C est la même pour les ellipses, et aussi la même pour les hyperboles.

L'équation de l'axe peut s'écrire

$$\frac{x}{l} = \frac{y}{m} = \frac{\rho}{e},$$

ρ désignant le rayon vecteur d'un point quelconque de cet axe, et e l'excentricité, qui est égale à $\sqrt{l^2 + m^2}$. En remplaçant dans l'équation de la conique (1) x et y par $\frac{l\rho}{e}$ et $\frac{m\rho}{e}$, on obtient l'équation

$$\rho^2(1 - e^2) - 2he\rho - h^2 = 0,$$

qui donne les rayons vecteurs des extrémités de l'axe. On en tire

$$\rho = \frac{he}{1 - e^2} \pm \frac{h}{1 - e^2}.$$

Or $\frac{he}{1 - e^2}$ est le rayon vecteur ρ_1 du centre ; d'autre part, la relation (4) nous donne $\frac{h}{1 - e^2} = -\frac{a - c\varepsilon}{2}$; par suite

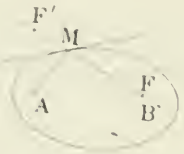
$$\rho = \rho_1 \pm \frac{a - c\varepsilon}{2}.$$

Il en résulte que le lieu des extrémités de l'axe est une conchoïde du lieu du centre, et comme le centre décrit deux cercles, le lieu se compose de deux conchoïdes de cercle.

Les sommets des hyperboles décrivent une conchoïde du cercle de centre O, de rayon $\frac{a + c}{2}$, la longueur constante étant $\frac{a - c}{2}$. Les sommets des ellipses décrivent une conchoïde du cercle de centre O, de rayon $\frac{a - c}{2}$, la longueur constante étant $\frac{a + c}{2}$.

SOLUTION GEOMÉTRIQUE

Imaginons d'abord une ellipse C tangente à l'ellipse donnée E au point M. Comme la tangente en ce point aux deux courbes est bissectrice extérieure des rayons vecteurs, le second foyer F de l'ellipse C se trouve sur la droite MB, et entre le point M et le point B, puisque cette ellipse passe par le point B.



Les deux points B et M étant sur l'ellipse C, on a

$$AM + MF = AB + BF,$$

ou en remplaçant MF par MB − BF et AM + MB par $2a$, il vient

$$BF = a - c.$$

Le lieu du point F est donc un cercle de centre B et de rayon $a - c$.

De plus, le grand axe de l'ellipse est égal à AB + BF, c'est-à-dire à $a + c$; comme le centre décrit aussi un cercle, le lieu des sommets du grand axe est une conchoïde de cercle.

Soit maintenant une hyperbole C′ tangente en M à l'ellipse E, ayant pour foyer le point A et passant par B. Le deuxième foyer F′ est encore sur la droite MB, mais dans la direction opposée. De plus, comme M et B sont deux points de la courbe et que la droite MB passe par un foyer, ces deux points appartiennent à des branches différentes, et l'on a

$$BF' - AB = MA - MF',$$

ou, en remplaçant MF′ par BF′ − MB et MA + MB par $2a$,

$$BF' = a + c.$$

Le lieu du point F′ est un cercle de centre B et de rayon $a + c$.

De plus, l'axe focal de cette hyperbole est égal à BF′ − AB, c'est-à-dire à $a - c$; comme le centre décrit aussi un cercle, le lieu des sommets est une conchoïde de cercle.

(Ont résolu cette question : MM. E.-N. Barisien et E. Bourrienne, à Rouen.)

AUTRE SOLUTION DE LA QUESTION 110

Si une conique C a pour foyer A et passe par le point B, on sait (voir *Nouvelles Annales* 1866, p. 145, note de M. Picquet) que le cercle principal de C est tangent au cercle principal de l'ellipse E et au cercle décrit sur AB comme diamètre. En prenant pour axes de coordonnées les axes de symétrie de l'ellipse E, et posant AB = $2c$, $2a$ et $2b$ désignant les axes de l'ellipse E, on voit que le cercle principal de C a une équation de la forme

$$x^2 + y^2 - a^2 + \lambda(x \cos \alpha + y \sin \alpha - a) = 0.$$

Exprimons qu'il est tangent au cercle décrit sur AB comme diamètre :

$$x^2 + y^2 - c^2 = 0.$$

L'axe radical de ces deux cercles a pour équation

$$c^2 - a^2 + \lambda(x \cos \alpha + y \sin \alpha - a) = 0.$$

Cette droite doit être tangente au second cercle; donc

$$c^2 - a^2 - \lambda a = \varepsilon \lambda c,$$

ε désignant ± 1 ; ce qui donne

$$c^2 - a^2 = \lambda(\varepsilon c + a).$$

Si $\varepsilon = +1$, on a $\lambda = c - a$,

et si $\varepsilon = -1$, $\lambda = -c - a$,

c'est-à-dire, dans tous les cas,

$$\lambda = \varepsilon c - a.$$

L'équation du cercle principal de la conique C est donc

$$x^2 + y^2 - a^2 + (\varepsilon c - a)(x \cos \alpha + y \sin \alpha - a) = 0, \tag{1}$$

de sorte que son centre a pour coordonnées

$$x_0 = \frac{(a - \varepsilon c) \cos \alpha}{2}, \qquad y_0 = \frac{(a - \varepsilon c) \sin \alpha}{2}, \tag{2}$$

et par conséquent les coordonnées du second foyer sont

$$x = (a - \varepsilon c) \cos \alpha + c, \qquad y = (a - \varepsilon c) \sin \alpha.$$

On aura le lieu du second foyer en éliminant α entre ces deux équations, ce qui donne

$$(x - c)^2 + y^2 = (a - \varepsilon c)^2.$$

On obtient ainsi deux cercles ayant le point B pour centre commun, et dont les rayons sont $a + c$ et $a - c$.

Le cercle de rayon $a + c$ touche l'ellipse E au sommet le plus voisin de A, de sorte que tous les points du lieu autres que ce sommet sont extérieurs à l'ellipse; ce cercle correspond donc à des coniques C du genre hyperbole. Le cercle de rayon $a - c$ correspond à des ellipses.

L'équation (1) peut s'écrire

$$\left(x - \frac{(a - \varepsilon c) \cos \alpha}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{(a - \varepsilon c) \sin \alpha}{2}\right)^2 = \frac{(a + \varepsilon c)^2}{4}.$$

Le centre de ce cercle décrit le cercle défini par l'équation

$$x^2 + y^2 = \frac{(a - \varepsilon c)^2}{4}, \tag{3}$$

et son rayon, égal au demi-axe focal de la conique C, ayant une valeur constante $\frac{a + \varepsilon c}{2}$, le lieu des sommets de l'axe focal de la conique C se compose de deux conchoïdes de cercle, le pôle étant le point A et la constante étant égale à $\frac{a + \varepsilon c}{2}$.

On peut obtenir l'équation de cette conchoïde en éliminant α entre l'équation (1) et l'équation de la droite AF, c'est-à-dire

$$(x + c) \sin \alpha - y \cos \alpha = \frac{2cy}{a - \varepsilon c}. \tag{4}$$

Les équations (1) et (4) déterminent $\sin \alpha$ et $\cos \alpha$, et en portant leurs expressions dans la relation

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1,$$

on obtient l'équation du lieu. On trouve ainsi

$$(a - \varepsilon c)^2(x^2 + y^2 + cx)^2 = y^2[x^2 + y^2 + 2cx - \varepsilon ac]^2 + [(x + c)(x^2 + y^2 - \varepsilon ac) - 2cy^2]^2.$$

En transportant les axes parallèlement à eux-mêmes de manière que A soit la nouvelle origine, l'équation devient :

$$(a - \varepsilon c)^2[x^2 + y^2 - cx]^2 = y^2[x^2 + y^2 - c^2 - \varepsilon ac]^2 + [x(x^2 + y^2 - 2cx + c^2 - \varepsilon ac) - 2cy^2]^2.$$

Les points cycliques sont des points triples et pour chacune des deux courbes le point A est un point de rebroussement, la tangente étant l'axe des x.

AUZERAM (Louis-le-Grand).

M. Landrin (lycée Louis-le-Grand), a obtenu l'équation du dernier lieu sous une autre forme.

L'équation du cercle dont on cherche la conchoïde est, rapportée à deux axes rectangulaires passant par A, AB étant l'axe des x,

$$(x - c)^2 + y^2 = \frac{(a - \varepsilon c)^2}{4}.$$

Si α, β sont les coordonnées d'un point de ce cercle, x et y étant les coordonnées d'un point du lieu, on a

$$(\alpha - c)^2 + \beta^2 = \frac{(a - \varepsilon c)^2}{4}, \tag{1}$$

$$\alpha y - \beta x = 0, \tag{2}$$

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = \frac{(a + \varepsilon c)^2}{4}. \tag{3}$$

Il s'agit d'éliminer α et β. En retranchant membre à membre les équations (1) et (3) on obtient

$$2(c - x)\alpha - 2\beta y = \varepsilon ac - x^2 - y^2 + c^2. \tag{4}$$

De (2) et (4) on tire

$$\alpha = \frac{x(x^2 + y^2 - c^2 - \varepsilon ac)}{2(x^2 + y^2 - cx)} \qquad \beta = \frac{y(x^2 + y^2 - c^2 - \varepsilon ac)}{2(x^2 + y^2 - cx)}.$$

Portons ces expressions dans l'équation (1); il vient, après transformations immédiates,

$$(x^2 + y^2)(x^2 + y^2 - c^2 - \varepsilon ac)^2 - 4cx(x^2 + y^2 - c^2 - \varepsilon ac)(x^2 + y^2 - cx)$$
$$= (a - 3\varepsilon c)(a + \varepsilon c)(x^2 + y^2 - cx)^2.$$

On voit ainsi que la courbe qui correspond à $\varepsilon = +1$ se décompose, quand $a = 3c$, en un cercle

$$x^2 + y^2 - 4c^2 = 0$$

et une cardioïde

$$(x^2 + y^2)^2 - 4cx(x^2 + y^2) - 4c^2y^2 = 0.$$

Ces résultats sont d'ailleurs évidents géométriquement.

---

124. — *Étant donné un triangle* ABC, *on considère toutes les hyperboles équilatères* H *conjuguées à ce triangle. Trouver le lieu des points de concours des tangentes communes à une conique fixe* C *et aux hyperboles* H, *ainsi que l'enveloppe des cordes communes à ces coniques.*

1° Prenons le triangle donné pour triangle de référence et soit

$$Au^2 + A'v^2 + A''w^2 + 2Bvw + 2B'wu + 2B''uv = 0, \tag{C}$$

l'équation tangentielle de la conique (C).

L'équation

$$\frac{u^2}{\alpha} + \frac{v^2}{\beta} + \frac{w^2}{\gamma} = 0 \tag{H}$$

représentera une hyperbole équilatère conjuguée au triangle ABC, si

$$\alpha + \beta + \gamma = 0. \tag{1}$$

Soit

$$ux + vy + wz = 0, \tag{2}$$

l'équation de l'un des points de concours des tangentes aux coniques (C) et (H). Éliminons w entre les équations (C) et (2), ce qui donne

$$(A''x^2 + Az^2 - 2B'xz)u^2 + 2(B''z^2 + A''xy - Bxz - B'yz)uv + (A''y^2 + A'z^2 - 2Byz)v^2 = 0,$$

puis entre les équations (H) et (2), d'où l'on déduit

$$\left(\frac{z^2}{\alpha} + \frac{x^2}{\gamma}\right)u^2 + \frac{2xy}{\gamma}uv + \left(\frac{z^2}{\beta} + \frac{y^2}{\gamma}\right)v^2 = 0.$$

Ces deux équations déterminent les coordonnées u et v des tangentes aux deux coniques (C) et (H) issues du point x, y, z; elles doivent donc être identiques si ce point est un ombilic. En identi-

fiant on obtient aisément

$$\frac{\alpha s}{yz} = \frac{\beta s'}{zx} = \frac{\gamma s''}{xy},$$

en posant

$$\begin{aligned} s &= Bx^2 + Ayz - B'xy - B''xz, \\ s' &= B'y^2 + A'zx - B''yz - Byx, \\ s'' &= B''z^2 + A''xy - Bzx - B'zy; \end{aligned}$$

et portant des valeurs proportionnelles à α, β, γ dans la relation (1), on obtient l'équation du lieu :

$$\frac{yz}{s} + \frac{zx}{s'} + \frac{xy}{s''} = 0.$$

Le lieu est donc une courbe du sixième degré, qui passe par les sommets du triangle de référence, par les points communs aux coniques s, s', s'' considérées deux à deux par les points d'intersection du côté BC avec les coniques s', s'', etc.

2° Pour obtenir l'enveloppe des cordes communes nous emploierons une méthode analogue. Soient

$$ax^2 + a'y^2 + a''z^2 + 2byz + 2b'zx + 2b''xy = 0, \qquad \text{(C)}$$

et

$$\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 = 0. \qquad \text{(H)}$$

les équations ponctuelles de la conique (C) et de l'hyperbole équilatère conjuguée au triangle ABC. Représentons par

$$ux + vy + wz = 0, \qquad (3)$$

l'équation d'une sécante commune à ces deux courbes. Éliminons z entre les équations (C) et (3); le calcul est identique au précédent et l'on trouve comme plus haut

$$x^2(a''u^2 + aw^2 - 2b'uw) + 2xy(b''w^2 + a''uv - buw - b'vw) + y^2(a''v^2 + a'w^2 - 2bvw) = 0.$$

Éliminons z entre les équations (H) et (3), ce qui donne

$$x^2(\alpha w^2 + \gamma u^2) + 2xy\gamma uv + y^2(\beta w^2 + \gamma v^2) = 0.$$

En écrivant que les deux équations obtenues sont identiques, on trouve facilement

$$\frac{\alpha}{u(bu^2 + avw - b'uv - b''uw)} = \frac{\beta}{v(b'v^2 + a'wu - b''vw - bvu)} = \frac{\gamma}{w(b''w^2 + a''uv - bwu - b'wv)},$$

et comme

$$\alpha + \beta + \gamma = 0,$$

l'équation tangentielle de l'enveloppe est

$$u(bu^2 + avw - b'uv - b''uw) + v(b'v^2 + a'^2wu - b''vw - bvu) + w(b''w^2 + a''uv - bwu - b'wv) = 0,$$

c'est-à-dire

$$(a + a' + a'')uvw - bu(v^2 + w^2 - u^2) - b'v(u^2 + w^2 - v^2) - b''w(u^2 + v^2 - w^2) = 0.$$

L. Maury, répétiteur au lycée d'Alais.

Solution analogue par M. L. Perrée, lycée Condorcet.

QUESTIONS POSÉES AUX EXAMENS ORAUX

École normale supérieure (1891).

Questions de M. J. Tannery.

59. — Effectuer la division

$$\frac{1 - x\cos\theta}{1 - 2x\cos\theta + x^2}.$$

Condition de convergence de la série obtenue.

60. — Étant donné le déterminant

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ a_2 & a_3 & \dots & a_n & a_1 \\ a_3 & a_4 & \dots & a_1 & a_2 \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ a_n & a_1 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} \end{vmatrix}$$

Quelle relation doit-il y avoir entre les nombres $a_1, a_2, \dots a_n$ pour que ce déterminant soit nul?

61. — Soit $f(x, y, z)$ une forme quadratique à trois variables. On considère la forme quadratique

$$\lambda f(x, y, z) + \left(xf'_{x'} + yf'_{y'} + zf'_{z'}\right)\left(xf'_{x''} + yf'_{y''} + zf'_{z''}\right)$$

et l'on suppose que l'on ait $\qquad f(x', y', z') = 0, \qquad f(x'', y'', z'') = 0.$

Pour quelles valeurs de λ le discriminant de la seconde forme est-il nul? Interprétation géométrique.

62. — Appliquer le théorème de Rolle à l'équation

$$(x-a)^\alpha (x-b)^\beta (x-c)^\gamma = 0.$$

63. — a, b, c, d étant les racines de l'équation

$$x^4 - x + 1 = 0,$$

former l'équation qui admet pour racines les trois valeurs de l'expression

$$ab + cd.$$

64. — On décompose la fraction rationnelle

$$\left(\frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \dots + \frac{L}{x-l}\right)^2$$

en éléments simples. Conditions pour que les fractions en $\frac{1}{x-a}, \frac{1}{x-b} \cdots$ manquent.

On considère l'expression $\left[\frac{f(x)}{\varphi(x)}\right]^2$, $\varphi(x)$ étant un polynome donné de degré m et $f(x)$ un polynome inconnu de degré inférieur à m. Déterminer $f(x)$ de manière que la condition précédente soit remplie.

65. — Construire la courbe représentée par l'équation

$$x^3 + y^3 - 6xyz - 6yz^2 = 0.$$

Trouver ses points d'inflexion.

66. — Étant donnée l'hyperbole $xy = a^2$ (axes rectangulaires), former l'équation aux abscisses des pieds des normales issues du point (α, β). Équation du cercle passant par trois des pieds, connaissant l'abscisse du quatrième.

67. — Trouver les points d'inflexion de la courbe définie par l'équation

$$y^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

68. — Étant donnée une cubique ayant un point d'inflexion à l'origine, trouver le lieu du conjugué harmonique de l'origine par rapport à une sécante quelconque y passant.

69. — On donne les deux coniques représentées par les équations

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = 1,$$
$$a'x^2 + 2b'xy + c'y^2 = 1.$$

On suppose $a'c' - b'^2 > 0$. Former l'équation en λ; montrer qu'elle a ses racines réelles. Condition pour qu'elle ait une racine double.

70. — Condition pour que quatre points d'une lemniscate soient sur un cercle. Y a-t-il des cercles bitangents à la lemniscate?

71. — Étant donnée la cubique $y = x^3$, trouver une relation entre les abscisses de trois points de cette courbe situés en ligne droite. On mène les tangentes AA′, BB′, CC′ en trois points A, B, C situés en ligne droite; ces tangentes coupent la courbe respectivement en trois autres points A′, B′, C′. Démontrer que A′, B′, C′ sont en ligne droite. Trouver l'équation de A′B′C′ connaissant l'équation de ABC.

72. — On donne deux points P, P_1 et deux droites D, D_1. Trouver une conique par rapport à laquelle P et P_1 soient les pôles respectifs de D et D_1. Démontrer que dans le cas général les coniques obtenues sont bitangentes; montrer qu'elles se coupent en quatre points distincts quand P est sur D_1 et P_1 sur D.

Généralisation dans l'espace. Montrer que les quadriques obtenues sont inscrites dans un même cône le long de la même courbe de contact.

73. — Étudier la courbe lieu de l'intersection des droites définies par

$$t^2x + ty + z = 0,$$
$$t^2\varphi'_x + t\varphi'_y + \varphi'_z = 0,$$

$\varphi(x, y, z)$ étant un polynome homogène du second degré; conditions pour que les deux équations en t aient une ou deux racines communes. Que sont par rapport à la courbe les points ainsi obtenus?

74. — Que représente l'équation

$$(A + \lambda)x^2 + (A' + \lambda)y^2 + (A'' + \lambda)z^2 = 1?$$

Nature des surfaces représentées par cette équation. Combien y en a-t-il qui soient tangentes à un plan donné? Les droites joignant l'origine aux points de contact forment un trièdre trirectangle.

75. — Que représente l'équation $(y - z)(z - x)(x - y) = a$?

Rapporter cette surface à un système d'axes rectangulaires dont Oz fasse partie; section de la surface par le plan de xy: construire la courbe.

76. — Trouver les plans coupant la surface $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} - 1 = 0$ suivant des paraboles.

77. — Soient $P(x, y, z)$ et $P'(x', y', z')$ deux points;

$$ux + vy + wz + h = 0,$$

l'équation d'un plan quelconque et

$$a^2u^2 + b^2v^2 + c^2w^2 - h^2 = 0. \qquad (1)$$

la condition pour qu'il soit tangent à une quadrique donnée. Trouver la relation entre (x, y, z) et (x', y', z') pour que les droites PP' soient telles que les plans tangents menés par ces droites à la quadrique soient rectangulaires. Équation du cône, lieu des droites PP' passant par un point fixe P. Lieu des sommets de ceux de ces cônes qui sont de révolution.

78. — Lieu des intersections des plans rectangulaires menés par deux droites fixes. Ce lieu est une surface réglée du second ordre qui est coupée suivant des cercles par des plans perpendiculaires à l'une ou à l'autre de ces droites; à quelle condition une surface du second ordre est-elle susceptible de ce mode de génération?

79. — Considérons la courbe définie par les équations

$$x = \frac{t}{1 + t^3}, \qquad y = \frac{t^2}{1 + t^3}, \qquad z = \frac{t^3}{1 + t^3}.$$

En combien de points un plan la coupe-t-elle? Étant donnés quatre points de cette courbe par leurs paramètres t_1, t_2, t_3, t_4, condition pour que ces quatre points soient dans un même plan; équation de ce plan.

80. — On donne dans l'espace deux droites D et D' et sur ces droites deux points O, O' à partir desquels on porte des segments $OM = \rho$, $O'M' = \rho'$ liés par la relation

$$a\rho\rho' + b\rho + c\rho' + d = 0.$$

Lieu décrit par la droite MM'. Trouver le centre de la surface ainsi que le plan tangent en un point.

QUESTIONS PROPOSÉES

142. — Soit une ellipse E. Par un point P de son plan, on lui mène quatre normales dont les pieds sont les points A, B, C, D. Les droites PA, PB, PC, PD coupent de nouveau l'ellipse en A', B', C', D'. Déterminer le lieu du point P de manière que les points A', B', C', D' soient sur un cercle.

(A. Boulanger.)

143. — On donne une parabole et par un point P de son plan on mène les trois normales à la parabole. On considère le cercle C qui passe par les pieds de ces normales. On prolonge les trois normales jusqu'aux points où elles rencontrent de nouveau la parabole. Soit C′ le cercle qui passe par les trois points ainsi obtenus. Quelle courbe doit décrire le point P :

1° pour que les cercles C et C′ soient orthogonaux ;

2° pour que les cercles C et C′ soient tangents.

(Baudoin, lycée d'Alger.)

144. — On considère deux triangles inscrits à une même conique et on leur circonscrit deux coniques bitangentes : enveloppe de leur corde de contact.

Si les deux coniques circonscrites sont homothétiques, leur corde commune passe par un point fixe.

(E. Duporcq, école Monge.)

145. — Le point de concours des hauteurs d'un tétraèdre à arêtes opposées orthogonales circonscrit à un paraboloïde, est dans le plan orthoptique de ce paraboloïde.

(E. Duporcq, école Monge.)

146. — Étant donné un cercle C on décrit d'un point P comme centre un cercle C′ de rayon donné. En supposant que le point P se meuve sur un diamètre donné D, du cercle C, trouver le lieu du point de rencontre des tangentes menées au cercle C par les points où il rencontre le cercle C′, avec les tangentes au cercle C′ qui sont perpendiculaires au diamètre D.

(A. Audoin, lycée de Bordeaux.)

147. — Même question en supposant le point P fixe et le rayon du cercle C′ variable.

(A. Audoin.)

AVIS

Les questions que nous proposons et qui nous sont envoyées le plus souvent par des élèves, ne sont pas toujours inédites; le journal s'adressant surtout à des élèves, il n'y a là aucun mal. Mais nous prions instamment nos jeunes correspondants d'avoir soin de nous avertir quand ils nous adressent des solutions empruntées à des mémoires déjà publiés dans d'autres recueils ; autrement ils s'exposeraient à des réclamations désagréables à recevoir, mais justifiées. Ainsi, dans le numéro précédent, nous avons publié une généralisation de la question 93; la solution est très intéressante, mais elle appartient à M. Laguerre ; pour s'en convaincre, il suffit de lire le mémoire que ce savant a publié dans les *Nouvelles Annales*, année 1878 : *Sur les courbes du quatrième degré qui ont trois points doubles d'inflexion et en particulier sur la lemniscate.*

Le savant géomètre pose

$$U = x\xi(bz^2 + cy^2) + y\eta(cx^2 + az^2) + z\zeta(ay^2 + bx^2),$$

$$V = a\eta\zeta yz + b\zeta\xi zx + c\xi\eta xy,$$

et

$$W = \frac{a\eta\zeta}{\xi} + \frac{b\zeta\xi}{\eta} + \frac{c\xi\eta}{\zeta},$$

et donne l'identité

$$U = V\left(\frac{x}{\xi} + \frac{y}{\eta} + \frac{z}{\zeta}\right) - xyzW.$$

C'est bien l'identité

$$P\alpha\beta\gamma \equiv Q(\beta\gamma x + \gamma\alpha y + \alpha\beta z) - xyz\,R$$

de la page 256 du numéro précédent. Une lecture même superficielle du mémoire de M. Laguerre montrera que la réclamation qui nous a été adressée à ce sujet est tout à fait fondée.

(B. N.)

Le Rédacteur-Gérant : H. VUIBERT.

PARIS. — IMP. CHAIX. — 4586-2-92.

2e Année. N° 7. Avril 1892.

REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

INTERSECTION DE DEUX CONIQUES. — ÉQUATION EN λ

M. Kœnigs, maître de conférences à la Sorbonne, a publié tout récemment (librairie Hermann) quelques leçons faisant partie du programme de l'Agrégation des Sciences mathématiques, parmi lesquelles se trouve une discussion très simple de l'équation en λ, que nous allons faire connaître à nos lecteurs, avec quelques compléments et modifications. Nous rappellerons d'abord quelques propositions indispensables.

Dérivée d'un déterminant.

Soit $F(\lambda)$ un déterminant dont les éléments dépendent d'un paramètre λ. On peut regarder $F(\lambda)$ comme une fonction composée, les fonctions composantes étant les éléments du déterminant; d'après cela, la dérivée $F'(\lambda)$ est égale à la somme des produits obtenus en multipliant la dérivée de $F(\lambda)$ par rapport à chaque élément par la dérivée de cet élément. Or la dérivée de $F(\lambda)$ par rapport à l'élément $a_{p.q}$ est le coefficient $A_{p.q}$ relatif à $a_{p.q}$, de sorte que

$$F'(\lambda) = \sum A_{p.q} \frac{d.a_{p.q}}{d\lambda},$$

la somme Σ s'étendant à toutes les valeurs $p = 1, 2, \ldots n$, $q = 1, 2, \ldots n$, en supposant que n soit le degré du déterminant.

Soit par exemple

$$F(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{1.1} & a_{1.2} & a_{1.3} \\ a_{2.1} & a_{2.2} & a_{2.3} \\ a_{3.1} & a_{3.2} & a_{3.3} \end{vmatrix}$$

on a

$$F'(\lambda) = a'_{1.1}A_{1.1} + a'_{1.2}A_{1.2} + a'_{1.3}A_{1.3} + a'_{2.1}A_{2.1} + \ldots + a'_{3.3}A_{3.3},$$

en représentant par $a'_{p.q}$ la dérivée de $a_{p.q}$ par rapport à λ.

En particulier, supposons le déterminant $F(\lambda)$ symétrique, de sorte que $a_{p.q} = a_{q.p}$; on a aussi $A_{p.q} = A_{q.p}$, et par conséquent si l'on suppose

$$F(\lambda) = \begin{vmatrix} A & B'' & B' \\ B'' & A' & B \\ B' & B & A'' \end{vmatrix}$$

et si l'on désigne par $\alpha, \alpha', \alpha'', \beta, \beta', \beta''$ les mineurs relatifs à A, A', A'', B, B', B'' respectivement, pris avec des signes convenables, on a

$$F'(\lambda) = \alpha \frac{dA}{d\lambda} + \alpha' \frac{dA'}{d\lambda} + \alpha'' \frac{dA''}{d\lambda} + 2\beta \frac{dB}{d\lambda} + 2\beta' \frac{dB'}{d\lambda} + 2\beta'' \frac{dB''}{d\lambda}. \qquad (1)$$

Coordonnées homogènes du point double de la conique formée par un système de deux droites.

Soient

$$f(x, y, z) = Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy,$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B'' & B' \\ B'' & A' & B \\ B' & B & A'' \end{vmatrix}$$

Si l'on suppose $\Delta = 0$, l'équation $f(x, y, z) = 0$ représente deux droites. Si les mineurs $\alpha, \alpha', \ldots \beta''$ sont tous nuls, ces deux droites sont confondues. L'un au moins des coefficients A, A' ou A'' est différent de zéro; si par exemple $A \neq 0$, la conique a une infinité de points doubles situés sur la droite représentée par

$$Ax + B'y + B'z = 0.$$

Supposons que les mineurs ne soient pas tous nuls. Alors, on sait que l'un au moins des mineurs $\alpha, \alpha', \alpha''$ est différent de zéro. Si l'on suppose d'abord $\alpha'' \neq 0$, les deux droites sont concourantes et l'on sait que leur point de concours, qui est le centre de la conique, est défini par les équations $f'_x = 0$, $f'_y = 0$ dans lesquelles on peut supposer d'ailleurs $z = 1$; mais le centre étant alors sur la conique, on a $xf'_x + yf'_y + zf'_z = 0$, et comme z est différent de zéro, $f'_z = 0$: donc les coordonnées du centre sont définies dans ce cas par les équations

$$f'_x = 0, \quad f'_y = 0, \quad f'_z = 0,$$

qui se réduisent à deux.

Ce raisonnement n'est plus légitime dans le cas où les deux droites sont parallèles c'est-à-dire quand $\alpha'' = 0$. Dans ce cas on peut poser

$$f(x, y, z) \equiv (ax + by)^2 + 2h(ax + by)z + kz^2.$$

Le point de concours des deux droites peut être défini par les équations $z = 0$, $ax + by = 0$. Or,

$$\frac{1}{2} f'_x \equiv a(ax + by + hz), \qquad \frac{1}{2} f'_y \equiv b(ax + by + hz), \qquad \frac{1}{2} f'_z \equiv h(ax + by) + kz.$$

Le point double est donc encore défini par les équations

$$f'_x = 0, \qquad f'_y = 0, \qquad f'_z = 0,$$

qui se réduisent encore à deux équations distinctes, parmi lesquelles se trouve nécessairement $f'_z = 0$.

Cela posé, soit d'abord $\alpha'' \neq 0$, et pour plus de clarté supposons chacun des six mineurs différents de zéro. Le point double est défini par les équations

$$Ax + B''y + B'z = 0, \qquad B''x + A'y + Bz = 0, \qquad B'x + By + A''z = 0;$$

en laissant de côté successivement la première, la seconde, puis la troisième équation, on obtient, en désignant par x, y, z les coordonnées du point double

$$\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta''} = \frac{z}{\beta'}, \qquad \frac{x}{\beta''} = \frac{y}{\alpha'} = \frac{z}{\beta}, \qquad \frac{x}{\beta'} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\alpha''}.$$

Par suite de nos hypothèses, aucune des coordonnées x, y, z n'est égale à zéro; en multipliant les trois premiers rapports par x, les trois suivants par y et les trois derniers par z, et comparant les résultats obtenus, on trouve immédiatement

$$\frac{x^2}{\alpha} = \frac{y^2}{\alpha'} = \frac{z^2}{\alpha''} = \frac{yz}{\beta} = \frac{zx}{\beta'} = \frac{xy}{\beta''}. \tag{2}$$

Je dis que ces formules subsistent dans tous les cas. En conservant l'hypothèse $\alpha'' \neq 0$, soit $\alpha = 0$. On sait que si un déterminant Δ est nul, les mineurs relatifs à deux rangées parallèles sont proportionnels. On en conclut aisément que les hypothèses $\alpha = 0$, $\alpha'' \neq 0$ entraînent nécessairement $\beta' = 0$, $\beta'' = 0$; de sorte que f'_y et f'_z sont proportionnelles. On a alors, comme on le voit bien facilement,

$$x = 0, \qquad \frac{y}{\alpha'} = \frac{z}{\beta}, \qquad \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\alpha''},$$

de sorte que

$$\frac{y^2}{\alpha'} = \frac{yz}{\beta} = \frac{z^2}{\alpha''},$$

résultats d'accord avec les formules (2), puisque $x^2 = 0$, $xy = 0$, $xz = 0$ et $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\beta' = 0$.

Si tous les mineurs étaient nuls sauf α'', on aurait $x = 0$, $y = 0$, $z \neq 0$, et dans les rapports (2) tous les termes seraient nuls sauf z^2 et α''.

En second lieu, supposons que l'équation $f(x, y, z) = 0$ représente deux droites parallèles distinctes. Dans ce cas $\alpha'' = 0$, $\beta = 0$, $\beta' = 0$; les coordonnées du point double vérifient alors les équations

$$z = 0, \qquad \frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta''}, \qquad \frac{x}{\beta''} = \frac{y}{\alpha'},$$

et par suite

$$\frac{x^2}{\alpha} = \frac{y^2}{\alpha'} = \frac{xy}{\beta''};$$

les équations (2) sont donc vérifiées dans tous les cas.

Remarque. — Les formules (2) s'obtiennent immédiatement en remarquant que si l'équation $f(x, y, z) = 0$ représente deux droites distinctes, le premier membre de l'équation tangentielle est un carré parfait, de sorte que

$$\alpha u^2 + \alpha' v^2 + \alpha'' w^2 + 2\beta vw + 2\beta' wu + 2\beta'' uv \equiv k(ux + vy + wz)^2$$

x, y, z désignant les coordonnées du point de concours des deux droites. On a donc

$$\alpha = kx^2, \quad \alpha' = ky^2, \quad \alpha'' = kz^2, \quad \beta = kyz, \quad \text{etc.}$$

Équation en λ.

Soient

$$\left.\begin{aligned} f &\equiv Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy = 0, \\ f_1 &\equiv A_1x^2 + A_1'y^2 + A_1''z^2 + 2B_1yz + 2B_1'zx + 2B_1''xy = 0 \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

les équations de deux coniques. L'équation $f + \lambda f_1 = 0$.

représente une infinité de coniques passant par les points communs aux deux premières; ces coniques forment ce que l'on nomme un *faisceau ponctuel*. Posons

$$F(\lambda) \equiv \begin{vmatrix} A + \lambda A_1 & B'' + \lambda B_1'' & B' + \lambda B_1' \\ B'' + \lambda B_1'' & A' + \lambda A_1' & B + \lambda B_1 \\ B' + \lambda B_1' & B + \lambda B_1 & A'' + \lambda A_1'' \end{vmatrix}$$

de sorte que $F(\lambda)$ est le discriminant de $f + \lambda f_1$. Si l'on remplace λ par une racine de l'équation $F(\lambda) = 0$, on sait que l'équation $f + \lambda f_1 = 0$ représente alors un couple de droites. L'équation $F(\lambda) = 0$ est ce que l'on nomme *l'équation en* λ relative aux deux coniques f, f_1. Soient α, α', α'', β, β', β'' les mineurs de $F(\lambda)$ relatifs aux éléments $A + \lambda A_1$, ... $B'' + \lambda B_1''$; si tous les mineurs sont nuls, $f + \lambda f_1$ est un carré parfait et l'équation $f + \lambda f_1 = 0$ représente *une droite double*. D'une manière plus précise, pour que l'équation $f + \lambda f_1 = 0$ représente une droite double, il faut et il suffit que λ soit une racine de l'équation $F(\lambda) = 0$ qui annule les trois mineurs principaux α, α', α''; les autres mineurs étant alors nécessairement nuls. Si au contraire l'un au moins des trois mineurs α, α', α'' est différent de zéro quand on y remplace λ par une racine de l'équation $F(\lambda) = 0$, le couple correspondant $f + \lambda f_1 = 0$ est composé de deux droites distinctes.

On a, d'après ce qu'on a vu plus haut,

$$F'(\lambda) \equiv \alpha A_1 + \alpha' A_1' + \alpha'' A_1'' + 2\beta B_1 + 2\beta' B_1' + 2\beta'' B_1'', \tag{4}$$

puisque la dérivée de $A + \lambda A_1$ par rapport à λ est égale à A_1, celle de $B'' + \lambda B_1''$ est égal à B_1'', et ainsi de suite.

Lorsque λ est racine de l'équation $F(\lambda) = 0$, la conique $f + \lambda f_1 = 0$ a un point double dont les coordonnées vérifient les équations

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial f_1}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial f_1}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial z} + \lambda \frac{\partial f_1}{\partial z} = 0. \tag{5}$$

Lorsque $\alpha = \alpha' = \alpha'' = 0$, tous les points de la conique sont des points doubles; dans le cas contraire le point double est unique, les équations (5) se réduisent à deux équations distinctes. Avant d'aller plus loin, il convient d'établir les propriétés suivantes des points doubles du faisceau.

Théorème I. — *Un point double du faisceau* $f + \lambda f_1$ *admet la même polaire dans toutes les coniques du faisceau, et réciproquement.*

En effet, soit λ' une racine de l'équation $F(\lambda) = 0$, et soient x, y, z les coordonnées d'un point double correspondant. On a, en vertu des équations (5),

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\lambda' \frac{\partial f_1}{\partial x}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -\lambda' \frac{\partial f_1}{\partial y}, \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = -\lambda' \frac{\partial f_1}{\partial z}.$$

La polaire du point (x, y, z) par rapport à la conique $f + \lambda f_1 = 0$, a pour équation

$$X\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial f_1}{\partial x}\right) + Y\left(\frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial f_1}{\partial y}\right) + Z\left(\frac{\partial f}{\partial z} + \lambda \frac{\partial f_1}{\partial z}\right) = 0$$

ou, d'après les relations précédentes,

$$(\lambda - \lambda')\left[X\frac{\partial f_1}{\partial x} + Y\frac{\partial f_1}{\partial y} + Z\frac{\partial f_1}{\partial z}\right] = 0,$$

ce qui démontre la proposition directe.

Réciproquement, pour que l'équation

$$X\frac{\partial f}{\partial x} + Y\frac{\partial f}{\partial y} + Z\frac{\partial f}{\partial z} + \lambda\left(X\frac{\partial f_1}{\partial x} + Y\frac{\partial f_1}{\partial y} + Z\frac{\partial f_1}{\partial z}\right) = 0$$

soit indépendante de λ, il est nécessaire que les dérivées de la fonction f soient proportionnelles à celles de f_1; ce qui revient à dire que x, y, z vérifient les équations

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda'\frac{\partial f_1}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda'\frac{\partial f_1}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial z} + \lambda'\frac{\partial f_1}{\partial z} = 0,$$

λ' désignant le facteur de proportionnalité; or ces équations expriment que (x, y, z) est un point double de la conique $f + \lambda' f_1 = 0$.

Théorème II. — *Deux points doubles ω, ω' appartenant à deux coniques singulières distinctes $\mathrm{f} + \lambda'\mathrm{f}_1 = 0$, $\mathrm{f} + \lambda''\mathrm{f}_1 = 0$, sont conjugués par rapport à toutes les coniques du faisceau.*

Soient x, y, z et x', y', z' les coordonnées de ω et de ω'. Posons

$$\mathrm{L} \equiv x\frac{\partial f}{\partial x'} + y\frac{\partial f}{\partial y'} + z\frac{\partial f}{\partial z'} \equiv x'\frac{\partial f}{\partial x} + y'\frac{\partial f}{\partial y} + z'\frac{\partial f}{\partial z},$$

$$\mathrm{M} \equiv x\frac{\partial f_1}{\partial x'} + y\frac{\partial f_1}{\partial y'} + z\frac{\partial f_1}{\partial z'} \equiv x'\frac{\partial f_1}{\partial x} + y'\frac{\partial f_1}{\partial y} + z'\frac{\partial f_1}{\partial z}.$$

On tire des équations (5), en remplaçant λ par λ' et ajoutant après multiplications respectives par x', y', z',

$$\mathrm{L} + \lambda'\mathrm{M} = 0;$$

on aura de la même façon

$$\mathrm{L} + \lambda''\mathrm{M} = 0,$$

et comme on suppose $\lambda' - \lambda'' \neq 0$, on en tire $\mathrm{L} = 0$, $\mathrm{M} = 0$. Par suite, quelle que soit la valeur de λ, on a $\mathrm{L} + \lambda\mathrm{M} = 0$; de sorte que ω et ω' sont conjugués par rapport à la conique $f + \lambda f_1 = 0$.

Le théorème suivant contient ce qu'il y a de nouveau dans la méthode de M. Kœnigs; il est fondamental.

Théorème III. — *Si λ est une racine multiple de l'équation $\mathrm{F}(\lambda) = 0$, n'annulant pas tous les mineurs α, α', α'', la conique $\mathrm{f} + \lambda\mathrm{f}_1$ se compose de deux droites distinctes qui se coupent en un point commun à toutes les coniques du faisceau.*

La conique singulière $f + \lambda f_1 = 0$ se compose de deux droites distinctes; les coordonnées de leur point commun vérifient les équations (2). Or on déduit de ces rapports, en les ajoutant terme à terme après avoir multiplié les deux termes du premier par A_1, ceux du second par A'_1, ceux du troisième par A''_1, ceux du quatrième par $2B_1$, etc.

$$\frac{x^2}{\alpha} = \frac{y^2}{\alpha'} = \frac{z^2}{\alpha''} = \frac{yz}{\beta} = \frac{zx}{\beta'} = \frac{xy}{\beta''} = \frac{f_1(x, y, z)}{\mathrm{F}'(\lambda)}. \tag{6}$$

Si l'un des mineurs α, α', α'' est différent de zéro, par exemple soit $\alpha \neq 0$, $\frac{x^2}{\alpha}$ a une valeur finie, par suite l'hypothèse $\mathrm{F}'(\lambda) = 0$ entraîne l'équation $f_1(x, y, z) = 0$.

Or on a aussi, en vertu des équations (5), $f + \lambda f_1 = 0$; donc $f(x, y, z) = 0$.

Remarque. — La dernière conclusion suppose que la racine multiple soit finie. Si λ était infinie, $f_1(x, y, z)$ serait un système de deux droites; en considérant l'équation aux inverses relative à $\mathrm{F}(\lambda)$, on verrait comme plus haut que le point double est sur la conique f, or il est évidemment sur f_1, donc la conclusion est encore vraie dans ce cas.

Réciproquement, si les deux droites d'un couple sont distinctes et se coupent en un point ω appartenant aux coniques f et f_1, le couple correspond à une racine multiple de l'équation $\mathrm{F}(\lambda) = 0$, qui n'annule pas tous les mineurs.

En effet, nous supposons $\mathrm{F}(\lambda) = 0$, et nous savons tout d'abord que les mineurs ne sont pas tous nuls, puisque les droites représentées par $f + \lambda f_1 = 0$ sont supposées distinctes; soit par exemple $\alpha \neq 0$, alors x est

aussi différent de zéro et le rapport $\frac{x^2}{\alpha}$ est différent de zéro; les équations (6) qui sont encore vérifiées prouvent que le rapport $\frac{f_1(x,y,z)}{F'(\lambda)}$ est différent de zéro; son numérateur $f_1(x, y, z)$ étant nul par hypothèse, il est nécessaire que son dénominateur le soit aussi; $F'(\lambda)$ est donc nul et par suite λ est une racine multiple de l'équation $F(\lambda) = 0$.

Remarque. — On suppose encore ici la racine λ finie; si elle était infinie, la considération de l'équation aux inverses lèverait la difficulté, comme plus haut.

Nous pourrions maintenant procéder à la discussion de l'équation $F(\lambda) = 0$; mais pour plus de commodité nous croyons utile d'établir encore les propositions suivantes.

Théorème IV. — *A deux racines distinctes de l'équation* $F(\lambda) = 0$, *correspondent deux couples distincts, et n'ayant aucune droite commune.*

En effet, je dis d'abord que si l'on suppose $\lambda \neq \lambda'$, les coniques représentées par les équations $f + \lambda f_1 = 0$, $f + \lambda' f_1 = 0$ sont distinctes.

Effectivement, si l'on suppose $$f + \lambda f_1 \equiv \mu\,(f + \lambda' f_1)$$
on en déduit $$(1 - \mu)\, f \equiv (\mu\lambda' - \lambda)\, f_1;$$
on ne peut supposer $\mu = 1$, sans quoi il faudrait supposer $f_1 \equiv 0$; on ne peut non plus supposer $\mu\lambda' - \lambda = 0$, ce qui entraînerait $f \equiv 0$; donc on devrait supposer les coniques f et f_1 identiques; nous écartons tous ces cas particuliers.

Je dis maintenant que les deux couples ne peuvent avoir aucune droite commune: en effet, P, Q, R désignant des fonctions linéaires de x, y, z, soient, s'il est possible,
$$f + \lambda f_1 \equiv PQ, \qquad f + \lambda' f_1 \equiv PR,$$
on en déduirait $$(\lambda - \lambda')\, f_1 \equiv P(Q - R), \qquad (\lambda - \lambda')\, f \equiv P(\lambda R - \lambda' Q);$$
par conséquent les coniques f et f_1 seraient toutes deux formées de droites et auraient une droite commune; on pourrait poser $f \equiv PP'$, $f_1 \equiv PP''$, et $f + \lambda f_1$ serait, quelle que soit la valeur attribuée à λ, identique à un produit de deux facteurs linéaires; on aurait $F(\lambda) \equiv 0$; nous écartons ce cas particulier.

Théorème V. — *Lorsque les coefficients de* f *et* f_1 *sont tous réels, à toute racine réelle de l'équation* $F(\lambda) = 0$ *correspond un couple de droites réelles ou imaginaires conjuguées; 2° à toute racine imaginaire correspond un couple formé de deux droites imaginaires non conjuguées.*

La première partie est évidente, car si λ est réel, le premier membre de l'équation $f + \lambda f_1 = 0$ a tous ses coefficients réels et l'on sait que dans ce cas l'équation représente deux droites réelles ou deux droites imaginaires conjuguées. Supposons maintenant λ imaginaire et soit $\lambda = p + qi$; alors, si $f + (p + qi)\, f_1 = 0$ représentait deux droites réelles ou deux droites imaginaires conjuguées, on aurait
$$f + (p + iq)\, f_1 \equiv (u + vi)(P^2 + \varepsilon Q^2), \qquad (\varepsilon = \pm 1),$$
d'où l'on tirerait
$$f + pf_1 \equiv u(P^2 + \varepsilon Q^2), \qquad qf_1 \equiv v(P^2 + \varepsilon Q^2).$$
D'ailleurs v est différent de zéro, sans quoi on aurait $f_1 \equiv 0$, par suite
$$f + pf_1 = q\,\frac{u}{v}\, f_1 \qquad \text{ou} \qquad f = \left(q\frac{u}{v} - p\right) f_1,$$
d'où l'on conclut ou bien que $f \equiv 0$ ou que f est proportionnel à f_1; nous excluons ces cas particuliers.

Enfin on vérifiera d'une manière analogue qu'on ne peut supposer $f + (p + qi) f_1 = P(Q + Ri)$, P, Q, R étant réels; donc à toute racine imaginaire correspond un couple de droites, imaginaires toutes les deux et non conjuguées, de sorte que
$$f + (p + qi) f_1 \equiv P.Q,$$

P et Q étant deux polynomes du premier degré imaginaires, et

$$f + (p - q)f_1 \equiv P_0Q_0,$$

P_0 et Q_0 désignant les polynomes respectivement conjugués de P et de Q.

Théorème VI. — *A une racine simple de l'équation* $F(\lambda) = 0$ *correspond un couple de deux droites distinctes.*

En effet, si λ est racine simple de l'équation $F(\lambda) = 0$, il est impossible que $f + \lambda f_1$ soit un carré parfait, puisque dans ce cas les mineurs α, α'... seraient tous nuls et par suite, la dérivée $F'(\lambda)$ serait nulle.

Théorème VII. — *Tout point commun à deux coniques* f, f_1 *appartient à toutes les coniques du faisceau* $f + \lambda f_1$; *si les coniques* f *et* f_1 *sont tangentes en un point* M *il en est de même pour deux coniques quelconques du faisceau, et réciproquement.*

En effet, il est évident que si les coordonnées x, y, z d'un point M annulent f et f_1, elles annulent aussi $f + \lambda f_1$; en second lieu, si les coniques f et f_1 sont tangentes en M, k désignant une constante, on a,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = k\frac{\partial f_1}{\partial x}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = k\frac{\partial f_1}{\partial y}, \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = k\frac{\partial f_1}{\partial z},$$

et par suite la tangente en M à une quelconque des coniques $f + \lambda f_1$ du faisceau, a pour équation

$$X\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda\frac{\partial f_1}{\partial x}\right) + \ldots = 0 \qquad \text{ou} \qquad (k + \lambda)\left[X\frac{\partial f_1}{\partial x} + Y\frac{\partial f_1}{\partial y} + Z\frac{\partial f_1}{\partial z}\right] = 0,$$

ce qui démontre la proposition. On peut remarquer que cette équation disparaît identiquement si $\lambda = -k$; cela tient à ce que l'équation $f - kf_1 = 0$ représente deux droites passant par le point de contact des coniques f, f_1.

Nous pouvons étudier d'une manière plus approfondie le cas où les coniques f et f_1 se touchent en un point M. Pour cela, rapportons les deux coniques à un triangle de référence dont un côté est la tangente en M, un second côté passant par le point de contact, le troisième côté étant d'ailleurs quelconque. Cela étant, les équations de deux coniques tangentes en M au côté AM du triangle ABM seront de la forme

$$F \equiv a\alpha^2 + a'\beta^2 + 2b''\alpha\beta + 2b'\alpha\gamma = 0,$$

$$F_1 \equiv a_1\alpha^2 + a'_1\beta^2 + 2b''_1\alpha\beta + 2b'_1\alpha\gamma = 0.$$

Les points communs à ces deux coniques sont sur la conique représentée par l'équation

$$(aa'_1 - a_1a')\alpha^2 + 2(b''a'_1 - b''_1a')\alpha\beta + 2(b'a'_1 - b'_1a')\alpha\gamma = 0,$$

qui se décompose en deux :

$$\alpha = 0 \qquad \text{et} \qquad (aa'_1 - a_1a')\alpha + 2(b''a'_1 - b''_1a')\beta + 2(b'a'_1 - b'_1a')\gamma = 0;$$

la première représente la tangente en M et la seconde une droite D sur laquelle se trouvent les points communs autres que le point de contact. On voit ainsi que deux coniques tangentes en un point M se coupent en général en deux autres points P, Q; mais il peut arriver que la droite D passe par le point de contact; il faut et il suffit pour cela que $b'a'_1 - b'_1a' = 0$. Si cette condition est remplie, on a identiquement

$$a'_1F - a'F_1 \equiv \alpha(h\alpha + h'\beta),$$

h et h' étant des constantes; si $b'a'_1 - b'_1a' = 0$ et aussi $b''a'_1 - b''_1a' = 0$, on a

$$a'_1F - a'F_1 \equiv h\alpha^2;$$

Dans le premier cas, l'un des points d'intersection des deux coniques P ou Q est venu se confondre avec le point de contact, dans le second cas P et Q sont venus tous deux se confondre avec ce point. On dit dans le premier cas que les coniques ont un contact du second ordre, et dans le second qu'elles sont osculatrices. Mais si l'une des coniques est un cercle, il est dit *osculateur* à l'autre conique dans le premier cas, *surosculateur* dans le second cas. Cela étant, on a évidemment $F \equiv kf$, $F_1 \equiv k_1f_1$, k et k_1 étant des constantes, de sorte que quand on revient au premier système de coordonnées, $a'_1F - a'F_1$ se change en $a'_1kf - a'k_1f_1$ et par suite, il existe une constante λ telle que, dans le cas général,

$$f + \lambda f_1 \equiv P.Q,$$

$P = 0$ désignant la tangente commune et $Q = 0$, une droite passant par les deux autres points communs aux deux coniques. Lorsque les coniques ont un contact du second ordre on aura une identité de même forme, seulement la droite représentée par $Q = 0$, passe par le point de contact de la tangente P. Enfin si le contact est du troisième ordre, on obtient une identité de la forme

$$f + \lambda f_1 \equiv P^2,$$

$P = 0$ étant la tangente commune.

Supposons qu'on se trouve dans le cas d'un contact du second ordre et considérons deux coniques du faisceau, soient

$$f + \lambda' f_1 \equiv U\,, \quad f + \lambda'' f_1 \equiv V\,;$$

on a

$$U + \mu V \equiv (1 + \mu) f + (\lambda' + \mu\lambda'') f_1\,.$$

En posant $\lambda' + \mu\lambda'' = \lambda(1 + \mu)$, c'est-à-dire $\mu = \dfrac{\lambda' - \lambda}{\lambda - \lambda''}$,

on aura

$$U + \mu V \equiv (1 + \mu) PQ,$$

ce qui démontre que les coniques U et V ont en M un contact du second ordre; on verrait de la même manière que si les coniques f et f_1 ont un contact du troisième ordre, il en est de même de deux coniques quelconques du faisceau.

Les réciproques sont évidentes, car si l'on pose $f + \lambda f_1 \equiv U$, $f + \lambda' f_1 \equiv V$, on en déduit

$$f \equiv \frac{\lambda V - \lambda' U}{\lambda - \lambda'}, \qquad f_1 \equiv \frac{U - V}{\lambda - \lambda'},$$

de sorte que f et f_1 sont deux coniques du faisceau ayant pour bases U et V.

DISCUSSION DE L'INTERSECTION DE DEUX CONIQUES

Nous laisserons d'abord de côté tout ce qui concerne la réalité. Il y a plusieurs cas à distinguer, l'équation $F(\lambda) = 0$ pouvant avoir :

1er Cas. — *Trois racines distinctes* λ_1, λ_2, λ_3.

On peut poser $f + \lambda_1 f_1 \equiv P_1 Q_1$, $f + \lambda_2 f_1 \equiv P_2 Q_2$, $f + \lambda_3 f_1 \equiv P_3 Q_3$, P_1, Q_1... Q_3 désignant des fonctions linéaires. La racine λ_1 étant simple, P_1 et Q_1 sont des droites distinctes VI); de même pour P_2 et Q_2, P_3 et Q_3; en outre les trois racines étant distinctes, les six droites P_1, Q_1, ... Q_3 sont toutes distinctes (IV). Aucune des droites d'un couple ne peut passer par le point de concours des droites d'un autre couple, puisque les racines sont simples (III). Les deux premiers couples par exemple forment donc un quadrilatère ABCD, AB étant la droite P_1, CD la droite Q_1, BC la droite P_2, et enfin AD la droite Q_2, Les deux coniques se coupent aux quatre points A, B, C, D (VII) et toute conique du faisceau passe par les quatre points; il en résulte que les droites AC et BD constituent le troisième couple. C'est d'ailleurs ce que l'on vérifie en remarquant que

$$(\lambda_1 - \lambda_2) P_3 Q_3 \equiv (\lambda_3 - \lambda_2) P_1 Q_1 + (\lambda_1 - \lambda_3) P_2 Q_2.$$

Plus généralement l'identité $(\lambda_1 - \lambda_2)(f + \lambda f_1) \equiv (\lambda - \lambda_2) P_1 Q_1 + (\lambda_1 - \lambda) P_2 Q_2$

fait bien voir que toutes les coniques du faisceau sont circonscrites au quadrilatère ABCD.

Ajoutons que les points doubles des trois couples de sécantes forment un triangle conjugué commun aux coniques du faisceau (II).

2e Cas. — *Une racine double* λ_1 *n'annulant pas tous les mineurs et une racine simple* λ_2.

A la racine double λ_1 correspond un couple de droites *distinctes* $P_1 Q_1$ se coupant en un point ω appartenant à l'intersection des coniques du faisceau (III); à la racine λ_2 correspondent aussi deux droites distinctes P_2, Q_2, (VI). Soit ω' le point de concours des droites $P_2 Q_2$; je dis que l'une de ces droites est la droite $\omega\omega'$. En effet, le point ω est sur toutes les coniques du faisceau, donc la polaire commune de ω se réduit à la tangente en ω, de sorte que toutes les coniques sont tangentes au point ω. De plus ω et ω' étant des points conjugués par rapport à toutes les coniques du faisceau, ω' est sur la polaire de ω, c'est-à-dire sur la tangente commune au point ω. Ainsi, en résumé, les coniques f et f_1 sont tangentes en un point ω, la tangente étant la droite P_2

par exemple; les droites P_1, Q_1 passent par ω et la droite Q_2 coupe ces deux droites en deux autres points communs à toutes les coniques. Le triangle conjugué commun cesse d'exister dans ce cas, comme on le vérifie aisément.

3e cas. — *Une racine double λ_1 annulant tous les mineurs et une racine simple λ_2.*

Le couple correspondant à λ_1 se réduit à une droite double P_1. Soient P_2, Q_2 les droites distinctes correspondant à λ_2, et soit ω' le point de concours de P_2, Q_2. Tout point de P_1 est un point double et par suite est conjugué de ω'; donc P_1 est la polaire de ω' dans toutes les coniques. Je dis que P_1 n'est pas une tangente, sans quoi son pôle ω' appartiendrait à toutes les coniques (comme le montre d'ailleurs l'identité $f + \lambda_1 f_1 \equiv P_1^2$) et λ_2 serait racine multiple. Les droites P_2, Q_2 coupent donc la droite P_1 en deux points distincts qui appartiennent à toutes les coniques du faisceau; il en résulte évidemment que les coniques sont tangentes en chacun de ces points. C'est ce que l'on vérifie d'ailleurs de la manière suivante. On a

$$f + \lambda_1 f_1 \equiv P_1^2, \qquad f + \lambda_2 f_1 \equiv P_2 Q_2;$$

donc les équations des deux coniques peuvent être écrites sous la forme

$$\lambda_1 P_2 Q_2 - \lambda_2 P_1^2 = 0 \quad \text{et} \quad P_2 Q_2 - P_1^2 = 0,$$

ce qui démontre la proposition. Ainsi, dans le cas présent, les coniques sont tangentes en deux points distincts A, B. Ajoutons qu'il y a dans ce cas une infinité de triangles conjugués communs dont un sommet est le point ω'; deux points conjugués par rapport au segment AB sont les deux autres sommets.

4e Cas. — *Une racine triple λ_1 n'annulant pas tous les mineurs.*

Le couple correspondant à la racine λ_1 est formé, par hypothèse, de deux droites distinctes P, Q qui se coupent en un point ω (appartenant à toutes les coniques du faisceau; ce point ayant même polaire dans toutes les coniques, on en conclut déjà que les coniques sont tangentes au point ω; il est nécessaire que l'une des deux droites, P par exemple, soit la tangente commune, sans quoi les coniques auraient en commun outre le point ω deux autres points p, q situés sur P et Q, et dans ce cas, on pourrait trouver une valeur λ_2 telle que $f + \lambda_2 f_1 \equiv P_2 Q_2$, $P_2 = 0$ étant la tangente en ω et $Q_2 = 0$ la sécante pq (VII); λ_2 serait une racine de l'équation $F(\lambda) = 0$, distincte de λ_1, ce qui est impossible puisque λ_1 est racine triple.

Donc, dans le cas présent, les coniques ont en un point ω un contact du second ordre, et se coupent en outre en un autre point.

5e Cas. — *Une racine triple λ_1 annulant tous les mineurs.*

On a $f + \lambda_1 f_1 \equiv P^2$; il s'agit de prouver que les coniques sont tangentes à la droite P en un même point ω de cette droite. En effet, toute l'intersection se compose des points communs à la conique f et à la droite P; si la droite P coupait la conique f en deux points distincts A, B, l'identité précédente montre que les coniques f et f_1 seraient bitangentes en A et B; si $Q = 0$, $R = 0$ sont les équations des tangentes en A et B, on aurait $f \equiv aP^2 + bQR$, $f_1 \equiv a_1 P^2 + b_1 QR$, de sorte que $a_1 f - a f_1 \equiv (a_1 b - b_1 a) QR$, et par suite $\frac{a}{a_1}$ serait une racine de l'équation $F(\lambda) = 0$, distincte de λ_1, puisque les couples QR et P^2 sont distincts. Donc la droite $P = 0$ touche la conique f en un point ω, et la conique f_1 est aussi tangente à P au point ω, de sorte que les coniques f et f_1 et par suite deux coniques quelconques du faisceau ont un contact du troisième ordre (VII).

On remarquera que dans ces deux derniers cas il n'y a pas de triangle conjugué commun.

Cas où l'équation en λ est indéterminée.

Supposons que $f + \lambda f_1$ soit un produit de deux facteurs quelle que soit la valeur de λ; il est impossible que les deux facteurs soient identiques pour toutes les valeurs de λ, car on aurait $f \equiv P^2$, $f_1 \equiv P_1^2$, et $f + \lambda f_1 \equiv P^2 + \lambda P_1^2$ ne peut être un carré parfait quelle que soit la valeur de λ, à moins de supposer $P_1 = k.P$, k étant une constante. D'ailleurs, dans ce cas particulier, f et f_1 se réduiraient à une même droite double et $F(\lambda)$ serait bien identiquement nul. Excluons ce cas; et soient x, y, z les coordonnées du point double de la conique $f + \lambda f_1$. On a

$$\frac{x^2}{\alpha} = \frac{y^2}{\alpha'} = \frac{z^2}{\alpha''} = \frac{yz}{\beta} = \frac{zx}{\beta'} = \frac{xy}{\beta''} = \frac{f_1(x, y, z)}{F'(\lambda)};$$

mais $F(\lambda) \equiv 0$, donc $F'(\lambda) \equiv 0$, par suite $f(x, y, z) = 0$ et $f_1(x, y, z) = 0$. Ainsi, x, y, z est un point double unique de la conique $f + \lambda f_1$, et ce point double appartient à toutes les coniques du faisceau. Il faut alors distinguer deux cas ;

1° *Le point double est indépendant de* λ. — Dans ce cas toute conique du faisceau se compose de deux droites issues d'un point déterminé, de sorte que l'on a par exemple

$$f \equiv P.Q, \quad f_1 \equiv aP^2 + 2bPQ + cQ^2 \qquad \text{et} \qquad f + \lambda f_1 \equiv aP^2 + (2b + \lambda)PQ + cQ^2.$$

2° *Le point double dépend de la valeur de* λ. — Soient P, Q et P_1, Q_1 deux couples de droites du faisceau : désignons par ω le point de concours des droites P, Q et par ω' le point de concours des droites P_1, Q_1 : tous les points doubles sont nécessairement des points communs à toutes les coniques du faisceau, puisque $F'(\lambda) = 0$. Par suite ω est sur l'une des droites P_1 ou Q_1 et ω' sur l'une des droites P, Q ; il en résulte que $\omega\omega'$ est une droite commune aux deux couples ; supposons que ce soient les droites P et P_1 qui se confondent avec $\omega\omega'$; on a ainsi, λ' et λ'' désignant des valeurs convenables de λ,

$$f + \lambda' f_1 \equiv P.Q, \quad f + \lambda'' f_1 \equiv P.Q_1$$

et par suite
$$(\lambda' - \lambda'')(f + \lambda f_1) \equiv [(\lambda - \lambda'')Q + (\lambda' - \lambda)Q_1].P ;$$

on voit ainsi qu'il y a une infinité de points doubles sur la droite P, et un autre isolé.

Discussion relative à la réalité.

Nous supposons les coefficients de f et f_1 réels.

Dans le **1er cas**, les trois racines étant distinctes il peut arriver deux cas :

A) *Trois racines réelles et inégales.* Nous avons posé $f + \lambda_1 f_1 \equiv P_1Q_1$, $f + \lambda_2 f_1 \equiv P_2Q_2$; et nous savons qu'à une racine réelle correspondent deux droites réelles ou imaginaires conjuguées. 1° Si les quatre droites P_1, Q_1, P_2, Q_2 sont réelles, les quatre points A, B, C, D sont réels et par suite les droites AC et BD c'est-à-dire les droites P_3, Q_3 sont aussi réelles ; les coniques se coupent donc, dans ce cas, en quatre points réels distincts ; il y a trois couples de sécantes réelles et les trois sommets du triangle conjugué commun sont réels. 2° Supposons P_1, Q_1 réelles et P_2, Q_2 imaginaires conjuguées ; les points A, B, C, D sont imaginaires. En effet, le point de concours ω_2 des droites P_2, Q_2 étant réel, il ne peut y avoir d'autre point réel sur aucune de ces deux droites. On voit que A et B sont conjugués ainsi que C et D ; le troisième couple AC, BD est formé de droites imaginaires conjuguées. 3° Supposons P_1, Q_1 imaginaires conjuguées, ainsi que P_2 et Q_2 ; on voit comme précédemment que les quatre points A, B, C, D sont encore imaginaires ; les points A, intersection de P_1 et Q_2 et C, intersection de P_2 et Q_1 sont imaginaires conjugués ; il en est de même des points B et D et par suite les sécantes AC et BD sont réelles. Nous pouvons donc énoncer ce théorème : Si les trois racines de l'équation $F(\lambda) = 0$ sont réelles et inégales, les coniques f et f_1 se coupent en quatre points distincts réels, ou en quatre points imaginaires conjugués deux à deux et admettent un triangle conjugué commun réel.

B) *Une racine réelle et deux racines imaginaires conjuguées.* Soient λ_1 la racine réelle et $\lambda_2 = p + qi$, $\lambda_3 = p - qi$ les racines imaginaires. On a $f + \lambda_2 f_1 \equiv PQ$, $f + \lambda_3 f_1 \equiv P_0Q_0$, $P = 0$, $Q = 0$ représentant deux droites imaginaires non conjuguées, $P_0 = 0$, $Q_0 = 0$ étant les polynomes respectivement conjugués des deux premiers. Les points (P, P_0) et (Q, Q_0) sont réels ; désignons-les par A et B ; les points (P, Q_0) et (P_0, Q) sont imaginaires conjugués; désignons-les par C et D ; ils ne peuvent être réels, car A et C sont distincts ; si C était réel, la droite AC c'est-à dire la droite P serait réelle. Le troisième couple qui correspond à la racine λ_1 est formé par les droites AB et CD ; il est donc réel. Ainsi quand l'équation en λ a une seule racine réelle, les deux coniques se coupent en deux points réels et distincts et en deux points imaginaires conjugués. Le triangle conjugué commun a un sommet réel et deux sommets imaginaires conjugués. Remarquons enfin que dans le cas des trois racines distinctes il y a *un* ou *trois* couples de sécantes réelles (*).

2e cas. — *Une racine double* λ_1 *n'annulant pas tous les mineurs.* La racine simple λ_2 (qui est réelle ainsi que la racine double λ_1) donne deux droites réelles, car l'une d'elles est la tangente commune au point ω, lequel est nécessairement réel comme étant l'intersection de deux droites réelles ou imaginaires conjuguées, mais, nous venons de le dire, les droites du couple correspondant à la racine double peuvent être réelles ou

(*) Voir une démonstration purement algébrique et directe, dans le *Traité de Géométrie analytique*, de M. H. Picquet, page 165.

imaginaires conjuguées. Dans le premier cas les coniques se touchent en un point réel et se coupent en deux autres points réels; dans le second cas elles se touchent en un point réel et se coupent en deux autres points imaginaires conjugués.

3e cas. — *La racine double annule tous les mineurs;* $f + \lambda f_1 = \varepsilon P^2$, $(\varepsilon = \pm 1)$; P est à coefficients réels; les deux coniques sont bitangentes, la corde des contacts étant toujours réelle, mais pouvant couper les coniques en deux points réels ou imaginaires conjugués. Dans le premier cas le couple correspondant à la racine simple est formé de deux tangentes communes réelles; dans le second cas, de deux tangentes communes imaginaires conjuguées.

Dans le 4e et le 5e cas les sécantes sont nécessairement réelles; car le point de contact étant unique est réel.

On voit encore aisément que si les coniques sont réduites à deux droites et ont une droite commune, elles sont composées de droites réelles; mais cela n'est plus nécessaire quand elles se réduisent à deux faisceaux de droites issues d'un même point.

ALGÈBRE

136. — *Calculer la valeur de l'intégrale*

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{Log} \sin \theta . d\theta .$$

Première solution. — Posons $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} L \sin \theta . d\theta$, $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} L \cos \theta d\theta$.

En posant $\theta = \frac{\pi}{2} - \theta'$, on voit que $I = J$. Ajoutons ces deux intégrales :

$$I + J = 2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (L \sin \theta + L \cos \theta) d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} L(\sin \theta \cos \theta) d\theta$$

ou

$$2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} L\left(\frac{\sin 2\theta}{2}\right) \frac{2\theta}{d2} = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (L \sin 2\theta - L\, 2) d.2\theta$$

ou encore, en posant $2\theta = t$,

$$2I = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} L \sin t . dt - \frac{\pi}{2} L2.$$

Mais $\int_0^{\pi} L \sin t . dt = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} L \sin t . dt = 2I$, puisque les valeurs de $L \sin t$ sont les mêmes entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ et entre $\frac{\pi}{2}$ et π; donc enfin

$$I = -\frac{\pi}{2} L2 = \frac{\pi}{2} L \frac{1}{2}.$$

(Capitaine E. N. Barisien.)

Solution identique par M. Giuseppe Santacroce (école industrielle de Foggia) et M. L. Maury, répétiteur au lycée d'Alais. M. Maury fait remarquer que cette intégrale est calculée dans les *exercices de Frenet*, au moyen du théorème de Côtes. Solution analogue par M. Duportal (lycée Condorcet).

Deuxième solution. — La valeur de l'intégrale cherchée est la limite de l'expression

$$\frac{1}{2^n} \frac{\pi}{2} \left[L \sin \frac{2}{2^n} \frac{\pi}{2} + L \sin \frac{2}{2^n} \frac{\pi}{2} + \ldots + L \frac{2^n - 1}{2^n} \frac{\pi}{2} + L \sin \frac{\pi}{2} \right]$$

quand n croît indéfiniment. L'expression précédente peut être écrite ainsi, en négligeant le dernier

terme dont la limite est nulle :

$$\frac{1}{2^n}\frac{\pi}{2}\,\mathrm{L.}\left[\sin\frac{1}{2^n}\frac{\pi}{2}\times\sin\frac{2}{2^n}\frac{\pi}{2}\times\ldots\times\sin\frac{2^n-1}{2^n}\frac{\pi}{2}\right]. \qquad (1)$$

Posons
$$\varphi(n)=\left[\sin\frac{1}{2^n}\frac{\pi}{2}\times\sin\frac{2}{2^n}\frac{\pi}{2}\times\ldots\times\sin\frac{2^n-1}{2^n}\frac{\pi}{2}\right]. \qquad (2)$$

En vertu des identités

$$\sin\frac{2^n-k}{2^n}\frac{\pi}{2}=\cos\frac{k}{2^n}\frac{\pi}{2},\qquad \sin\frac{k}{2^n}\frac{\pi}{2}\times\cos\frac{k}{2^n}\frac{\pi}{2}=\frac{1}{2}\sin\frac{k}{2^{n-1}}\frac{\pi}{2},$$

l'équation (2) peut s'écrire :

$$\varphi(n)=\left(\frac{1}{2}\sin\frac{1}{2^{n-1}}\frac{\pi}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\sin\frac{2}{2^{n-1}}\frac{\pi}{2}\right)\cdots\left(\frac{1}{2}\sin\frac{2^{n-1}-1}{2^{n-1}}\frac{\pi}{2}\right)\sin\frac{\pi}{4}$$

ou
$$\varphi(n)=\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{2^{2^{n-1}-1}}\varphi(n-1)=\frac{\varphi(n-1)}{2^{2^{n-1}-\frac{1}{2}}},$$

d'où
$$\mathrm{L}\,\varphi(n)=\mathrm{L}\,\varphi(n-1)+\left(2^{n-1}-\frac{1}{2}\right)\mathrm{L}\,\frac{1}{2}.$$

On en déduit aisément

$$\mathrm{L}\,\varphi(n)=\mathrm{L}\,\varphi(1)+\left(2^{n-1}+2^{n-2}+\ldots+2^2+2^1-\frac{n-1}{2}\right)\mathrm{L}\,\frac{1}{2}=\mathrm{L}\,\varphi(1)+\left(2^n-\frac{n+3}{2}\right)\mathrm{L}\,\frac{1}{2}.$$

Or, $\mathrm{L}\,\varphi(1)=\mathrm{L}\sin\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}\mathrm{L}\,\frac{1}{2}$; donc $\mathrm{L}\,\varphi(n)=\left(2^n-\frac{n+2}{2}\right)\mathrm{L}\,\frac{1}{2}$ et par suite

$$\lim\left(\frac{\pi}{2}\frac{\mathrm{L}\,\varphi(n)}{2^n}\right)=\lim\left(1-\frac{n+2}{2^{n+1}}\right)\cdot\frac{\pi}{2}\,\mathrm{L}\,\frac{1}{2}=\frac{\pi}{2}\,\mathrm{L}\,\frac{1}{2}.$$

L. P. Randon.

M. G. Santacroce a envoyé une solution analogue, mais fondée sur le théorème de Côtes.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

119. — *Lieu des pieds des perpendiculaires abaissées du foyer d'une parabole sur les normales à cette courbe.*

(Ecole des ponts et chaussées, Cours préparatoires, 1891.)

Soit
$$y^2-2px=0$$
l'équation d'une parabole rapportée à son axe et à la tangente au sommet.

L'équation d'une normale à cette courbe est de la forme

$$y=m(x-p)-\frac{pm^3}{2}.$$

La perpendiculaire abaissée du foyer sur cette normale a pour équation

$$my+x-\frac{p}{2}=0.$$

On obtiendra l'équation du lieu en éliminant m entre ces deux dernières équations. Il y a évidemment avantage à transporter les axes parallèlement à eux-mêmes en prenant le foyer pour origine; on obtient ainsi les deux équations

$$y=m\left(x-\frac{p}{2}\right)-\frac{pm^3}{2},$$
$$my+x=0$$

en remplaçant m par $-\frac{x}{y}$ on obtient pour l'équation du lieu

$$(x^2 + y^2)(2y^2 - px) = 0.$$

Le lieu se compose donc des droites isotropes issues du foyer (ce qui était évident *a priori* puisque ces droites sont en même temps des tangentes et des normales, et que les perpendiculaires qu'on peut leur mener par le foyer coïncident avec elles-mêmes) et d'une parabole ayant pour sommet le foyer de la parabole donnée, et pour paramètre le quart du paramètre de cette dernière.

SOLUTION GÉOMÉTRIQUE

Soit MN une normale à la parabole ayant le point A pour sommet et F pour foyer. Le triangle FMN est isocèle, et par suite, la perpendiculaire FP sur la normale tombe au milieu P de MN. Soient H et K les projections de M et de P sur l'axe; on sait que la sous-normale HN est égale à p, parsuite, $KN = \frac{1}{2}p$; le triangle rectangle FPN donne

$$\overline{PK}^2 = FK.KN = \frac{p}{2}\cdot FK;$$

donc le point P décrit bien une parabole ayant pour sommet le point F et pour paramètre $\frac{p}{4}$.

(R. Lévy, lycée Janson de Sailly.)

(Ont résolu la même question : MM. Audoin, lycée d'Angoulême; Bergman, Saint-Louis; Blondel, lycée d'Amiens; Bourrienne, à Rouen; Louis Bros, à Saint-Girons; D. Cot, lycée de Poitiers; F. Faure, lycée de Grenoble; Gazagne, lycée de Lyon; James Hais, lycée Hoche; Eugène Hallard, lycée de Bordeaux; A. Leroux, pensionnat des frères de Passy; L. Perrée, lycée Condorcet; Louis Salle, lycée d'Alger; Vazou, professeur au collège de Falaise; G.-B. Verrina, à Voltri; C. Wavrant maître répétiteur au collège de Draguignan.)

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE

148. — *On donne une surface gauche de révolution dont l'axe* OZ *est vertical et situé à* 90^{mm} *en avant du plan vertical de projection; le collier, dont le rayon égale* 20^{mm}, *a pour cote* 100^{mm}; *les génératrices font un angle de* 50° *avec le plan horizontal.*

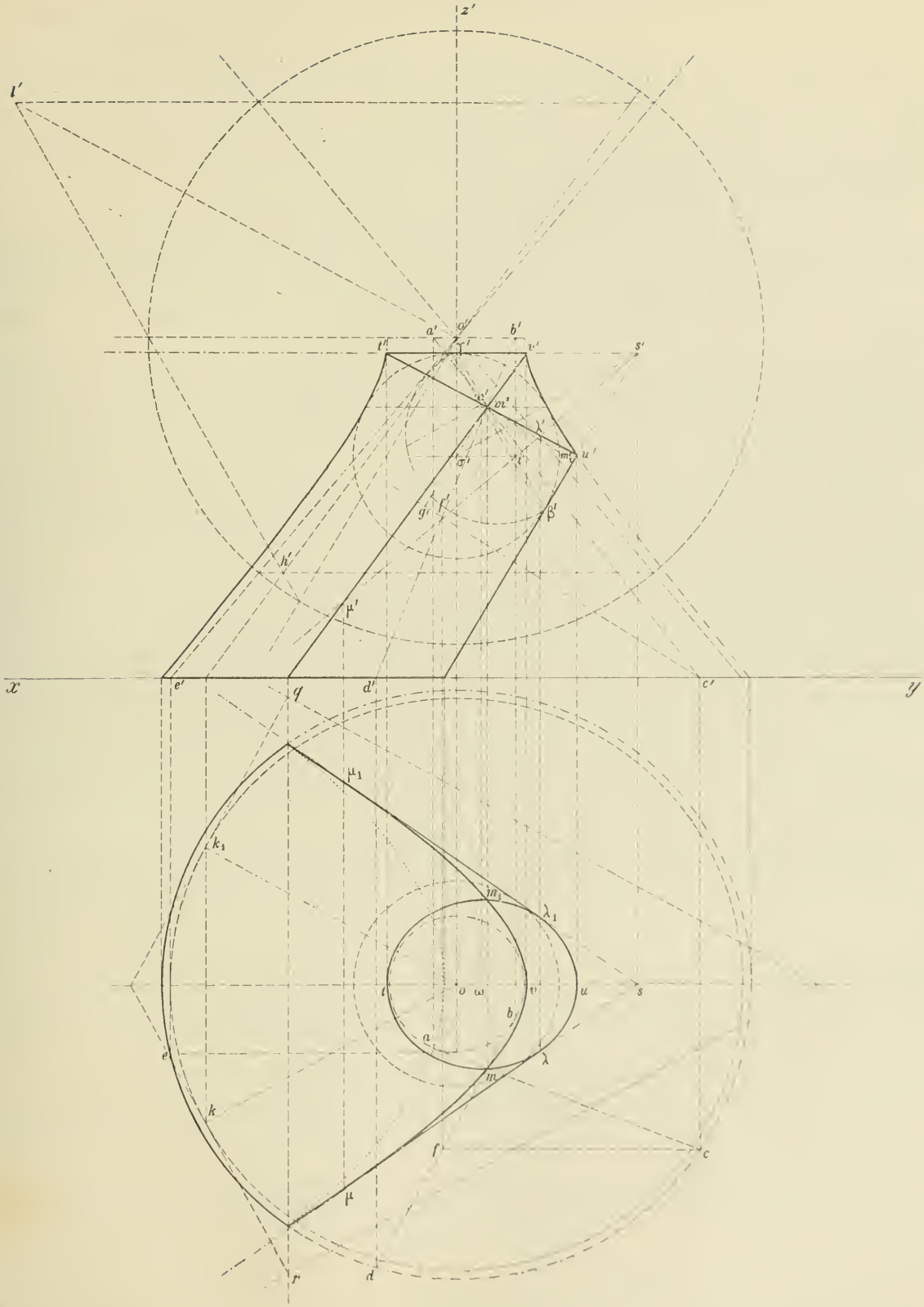
1° On prend sur cette surface un point M, *situé* au-dessous *du collier et dont l'éloignement est de* 115^{mm} *la ligne de rappel* mm′ *étant placée à* 9^{mm} *à droite du point* O. *Construire le plan* P *tangent en* M *à l'hyperboloïde, et la sphère* S *qui a son centre sur l'axe* OZ *et est tangente en* M *au plan* P.

2° Tracer les contours apparents d'un cône circonscrit à cette sphère suivant le petit cercle dont le plan, perpendiculaire au plan vertical, passe par le point M *et par le point le plus haut de la sphère.*

Expliquer de quelle nature est l'intersection de ce cône et de l'hyperboloïde et quelle particularité présente la projection verticale de cette intersection.

(L'hyperboloïde est limité au plan du collier, et la sphère est supposée transparente. — Tracer la ligne de terre parallèle aux petits côtés de la feuille.)

(Certificat d'aptitude à l'enseignement spécial, 1891, 2e session.)



z'
l'
a'
o'
b'
t'
v'
s'
m'
λ'
u'
σ'
i'
g'
f'
β'
h'
μ'
x
e'
q
d'
c'
y
μ₁
k₁
m₁
λ₁
t
o
ω
v
u
s
b
a
e
λ
m
k
f
c
μ
r
d

Pour obtenir la projection verticale du point M, je détermine les deux génératrices passant par ce point; elles sont projetées horizontalement en ma et mb. Je coupe l'hyperboloïde par le plan horizontal de projection qui me donne le point ee' sur la génératrice principale, et dans l'hyperboloïde, un cercle de centre o et de rayon oe; les génératrices de l'hyperboloïde qui passent par M sont AC et BD, dont les projections verticales se coupent en m'.

Le plan tangent en (mm') est déterminé par les génératrices $(amc, a'm'c')$ et $(bmd, b'm'd')$.

Pour avoir le centre de la sphère tangente à l'hyperboloïde en M et ayant son centre sur l'axe, je mène la perpendiculaire $m'\sigma'g'$, mo au plan (à l'aide de la ligne de front $(fc, f'c')$; le centre de la sphère est (o, σ'); son rayon est la vraie longueur de $(m'\sigma', mo)$ ou $m'_1\sigma'$.

Le cône de révolution est déterminé par son sommet et la sphère inscrite, le parallèle de contact étant $\beta'\gamma'$.

Le cône et l'hyperboloïde ont un plan principal commun; ils sont bi-tangents en $(m\,m')$ et $(m_1\,m')$; l'intersection en projection verticale sera une conique ayant un point double en m'; donc un système de deux droites. L'intersection se composera de deux courbes planes dont les plans seront perpendiculaires au plan vertical.

Pour avoir la direction des deux droites (qui sont les asymptotes de la projection verticale), je remplace l'hyperboloïde par son cône asymptote et je transporte le cône S en O. Je coupe par une sphère qui détermine des parallèles se coupant en h' et l'. Je mène par m' des parallèles à $o'l'$ et $o'h'$; j'ai la projection verticale de l'intersection.

Pour avoir la projection horizontale, je fais des sections planes; $t'u'$ me donne une ellipse dont les sommets sont t et u, un des axes est tu, l'autre est la corde du point $\omega\omega'$ milieu de $(tu, t'u')$ dans la section droite du cône. $v'm'$ me donne une hyperbole. Pour avoir les asymptotes, je considère le cône asymptote de l'hyperboloïde; le plan $o'h'$ le coupe suivant les génératrices OK, OK_1 qui sont les directions des asymptotes, les points de rencontre q et r de la trace horizontale du plan $v'm'$ avec la tangente à la base du cône asymptote en k et k_1 sont les traces des asymptotes.

La génératrice $s'i'$, tangente en i' au contour apparent horizontal de la sphère de centre (o, σ'), détermine les points de contact λ, λ_1, μ, μ_1 de l'ellipse et de l'hyperbole avec le contour apparent horizontal du cône.

Le plan horizontal coupe le cône suivant une parabole.

L'épure représente le solide commun au cône et à l'hyperboloïde limité au plan horizontal.

(Gérard, lycée Saint-Louis.)

QUESTIONS POSÉES AUX EXAMENS ORAUX

École normale supérieure (1891). *(Suite.)*

Questions de M. Kœnigs.

81. — Etant donnée l'équation

$$f(x) = f(y),$$

où $f(x)$ désigne un polynome entier du troisième degré, trouver des polynomes du second degré φ, ψ, χ dépendant d'un paramètre λ, et tels qu'en posant

$$x = \frac{\varphi(\lambda)}{\chi(\lambda)}, \qquad y = \frac{\psi(\lambda)}{\chi(\lambda)},$$

l'équation donnée soit vérifiée identiquement.

Si $f(x)$ est du quatrième degré, à quelle condition pourra-t-on trouver des polynomes φ, ψ, χ ayant la même propriété? Prouver qu'il suffit que $f(x) = 0$ ait une racine double.

82. — Étant donnée l'équation du troisième degré

$$x^3 + px^2 + qx + r = 0,$$

trouver une transformation homographique

$$y = \frac{mx + n}{m'x + n'}$$

qui reproduise les racines de la proposée.

83. — Étant donnée une équation du quatrième degré dont les racines sont α, β, γ, δ, on sait que les quantités telles que

$$z = (\alpha + \beta - \gamma - \delta)^2, \quad u = \alpha\beta + \gamma\delta$$

sont racines de deux équations du troisième degré. Comment, de l'équation donnant les valeurs de z, peut-on passer à celle qui donne les valeurs de u?

84. — Résoudre le système

$$\frac{x^2}{a^2 - \lambda} + \frac{y^2}{b^2 - \lambda} + \frac{z^2}{c^2 - \lambda} - 1 = 0,$$
$$\frac{x^2}{a^2 - \mu} + \frac{y^2}{b^2 - \mu} + \frac{z^2}{c^2 - \mu} - 1 = 0,$$
$$\frac{x^2}{a^2 - \nu} + \frac{y^2}{b^2 - \nu} + \frac{z^2}{c^2 - \nu} - 1 = 0.$$

85. — Soient $f(x) = 0$ une équation algébrique de degré m ayant ses racines $a, b, c \ldots l$ distinctes et $G(x)$ un polynome de degré $m - 2$. Démontrer que

$$\sum \frac{G(a)}{f'(a)} = 0.$$

86. — Décomposer en fractions simples $\dfrac{x^n}{(x+1)^{2n+1}(x-1)^{2n+1}}$.

87. — Étant donnée une strophoïde droite définie par l'équation

$$x(x^2 + y^2) - a(x^2 - y^2) = 0,$$

en posant $y = tx$ on exprime x et y en fonctions rationnelles de t. On considère quatre points de la courbe de paramètres t, t', θ, θ'; trouver la condition pour que ces points soient sur un cercle, en se servant des paramètres des troisièmes points de rencontre des droites t, t, et θ, θ' avec la courbe.

88. — Etant donnés deux axes rectangulaires et deux points M, M′ de coordonnées (p, q), (p', q') qui sont des nombres entiers vérifiant l'égalité

$$pq' - qp' = 1,$$

montrer que dans le triangle OMM′ il n'y a aucun point dont les coordonnées soient des nombres entiers.

89. — Étant donné l'ellipsoïde E :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0,$$

on considère une cubique gauche représentée par les équations

$$x = \frac{Aa^2}{\lambda - p}, \qquad y = \frac{Bb^2}{\lambda - q}, \qquad z = \frac{Cc^2}{\lambda - r},$$

qui rencontre l'ellipsoïde en six points. Montrer que les normales à l'ellipsoïde en ces six points sont sur une même quadrique.

90. — Par un point A pris dans le plan d'une ellipse, on mène une droite Δ quelconque; du centre de l'ellipse, on abaisse une perpendiculaire D sur la droite. Lieu du point de rencontre de la droite Δ et du diamètre conjugué à la direction D. On trouve l'hyperbole d'Apollonius. Expliquer géométriquement ce résultat.

91. — Étant donné un ellipsoïde

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0,$$

par un point $A(x_0, y_0, z_0)$ on mène une droite quelconque D. On mène le plan diamétral P, perpendiculaire à D. A quelle condition le diamètre conjugué du plan P rencontrera-t-il la droite D? Quand la condition est remplie, trouver le lieu du point de rencontre. Expliquer géométriquement le résultat trouvé.

92. — Équation générale des quadriques ayant le plan des xy pour plan cyclique. Trouver les axes de ces quadriques.

93. — Étant donnée la strophoïde droite

$$x(x^2 + y^2) - a(x^2 - y^2) = 0,$$

trouver les normales issues d'un point $A(\alpha, \beta)$, en écrivant que la distance de ce point à la courbe est maximum ou minimum.

Faire passer une conique par les cinq pieds des normales issues de (α, β). Montrer que le sixième point d'intersection de la conique et de la cubique est le point de rencontre de OA avec la cubique, O étant son point double.

94. — Par deux points pris sur une strophoïde droite on fait passer une famille de cercles. Démontrer qu'ils coupent la strophoïde de manière que la seconde corde d'intersection passe par un point fixe.

95. — Soient Ox, Oy deux axes rectangulaires. Sur Ox on prend deux points F, F′ d'abscisses égales et de signes contraires c, $-c$. Par un point M on mène une droite rencontrant Ox et P en Oy en Q. On prend le point P_1 conjugué de P par rapport à F et F′ et Q_1 conjugué de Q par rapport aux points φ, φ' situés sur Oy et ayant pour ordonnées $c\sqrt{-1}$ et $c\sqrt{-1}$. Démontrer que les droites PQ et P_1Q_1 sont rectangulaires. Trouver l'enveloppe de P_1Q_1.

Démontrer que le point M étant fixe, si l'on abaisse du point M une normale sur une ellipse ayant F et F′ pour foyers, la tangente au pied de la normale est une droite P_1Q_1. Polaire réciproque de l'enveloppe de P_1Q_1. L'enveloppe est une parabole : trouver son foyer.

96. — $f(x)$ étant un polynome du troisième degré, quelle est la courbe représentée par l'équation

$$f(x) = f(y)?$$

On trouve une droite et une conique : calculer l'excentricité de la conique.

97. — Quelle est la surface représentée par l'équation

$$\frac{Ax + By + Cz + D}{A'x + B'y + C'z + D'} = \frac{ax^2 + 2bxy + cy^2}{a'x^2 + 2b'xy + c'y^2}?$$

Nature des sections faites par des plans menés par l'axe des z. Plan tangent en un point de l'axe des z.

QUESTIONS PROPOSÉES

149. — Évaluer le volume compris entre le plan des xy et les surfaces représentées par les équations

$$z = \frac{xy}{a}, \qquad x^2 + y^2 - 2a(x + y) + a^2 = 0.$$

(G. B. Verrina, à Voltri.)

150. — On donne deux droites D, D′ et deux plans P, P′. Trouver le lieu du point M dont les distances aux droites D, D′ évaluées parallèlement aux plans P et P′ respectivement sont dans un rapport constant. Le lieu est une quadrique. Quelles sont les quadriques susceptibles de ce mode de génération et quelles positions occupent par rapport à l'une d'elles les droites D, D′ et les plans P, P′.

151. — Trouver le lieu du pied de la perpendiculaire commune à une génératrice rectiligne fixe G d'un quadrique et à toutes les génératrices du même système. Ce lieu est une conique. Trouver l'enveloppe du plan de cette conique quand la génératrice G décrit la quadrique.

152. — On considère les coniques (C) suivant lesquelles un plan P coupe un système de surfaces homofocales. Trouver le lieu des centres, le lieu des foyers, l'enveloppe des axes des coniques (C).

(Puig, professeur au lycée de Belfort.)

Le Rédacteur-Gérant : H. VUIBERT.

PARIS. — IMP. CHAIX. — 7784-3-92.

2e Année. N° 8. Mai 1892.

REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

ALGÈBRE

131. — *Soient* $u = f(x)$, $v = \varphi(x)$ *deux polynomes entiers premiers entre eux. Si l'équation*

$$g(u, v) \equiv u^2 - 3uv + 2v^2 = 0$$

admet la racine a *au degré* p *de multiplicité, l'équation*

$$g(u', v') \equiv u'^2 - 3u'v' + 2v'^2 = 0$$

admet la racine a *au moins au degré* $p - 1$; u' *et* v' *étant les dérivées de* u *et de* v.

On peut écrire

$$g(u, v) \equiv (u - v)(u - 2v)$$

et

$$g(u', v') \equiv (u' - v')(u' - 2v').$$

Puisque u et v sont premiers entre eux, $u - v$ et $u - 2v$ le sont aussi; ces deux polynomes ne peuvent admettre en même temps la racine a; et comme par hypothèse $g(u, v)$ est divisible par $(x - a)^p$, il faut que l'un des deux facteurs $u - v$ ou $u - 2v$ soit divisible par $(x - a)^p$. Supposons que ce soit $u - v$; alors sa dérivée $u' - v'$ sera divisible par $(x - a)^{p-1}$, et $g(u', v')$ admettra bien la racine a au moins au degré $p - 1$, car $u' - 2v'$ pourrait admettre cette racine.

Plus généralement, considérons le polynome homogène à deux variables

$$f(u, v) \equiv a_0u^m + a_1u^{m-1}v + a_2u^{m-2}v^2 + \ldots a_mv^m,$$

et supposons que ce polynome soit décomposable en un produit de m facteurs linéaires *distincts* de la forme $\lambda u + \mu v$. Si $f(u, v)$ admet le facteur $(x - a)^p$, $f(u', v')$ admettra le facteur $x - a$ au moins $p - 1$ fois.

Ch. Ripault, soldat au 27e de ligne, à Dijon.

Solutions semblables par MM. Audibert, à Marseille; L. Boé, à Tarbes; Gallotti, Condorcet; Gérard, Saint-Louis; J. Hais (lycée Hoche), L. Perrée, Condorcet; G. A. Pouilliart, lycée de Clermont.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

123. — *Par un point donné, on mène des droites parallèles à un système de deux diamètres conjugués variables d'une conique* C: *démontrer que la droite joignant les milieux des cordes interceptées sur une seconde conique* C′ *passe par un point fixe.*

La proposition se ramène immédiatement au théorème de Frégier. En effet, les milieux des cordes déterminées dans une conique C′ par les sécantes issues d'un point A sont sur une conique C″ passant par le point A; par suite, on mène par le point A deux sécantes parallèles à deux diamètres conjugués de la conique C, on joint leurs points de rencontre M′, M″ avec la conique C″; on sait que la droite M′M″ passe par un point fixe, en vertu d'une généralisation bien connue du théorème de Frégier.

AUTRE SOLUTION

On peut traiter la question par le calcul.

Prenons pour axe des x un diamètre passant par le point donné, l'axe des y ayant une direction conjuguée à celle de l'axe des x, par rapport à la conique C′ qui aura par suite une équation de la forme

$$Ax^2 + Cy^2 + 2Dx + F = 0.$$

L'équation aux abscisses des points d'intersection de cette conique et d'une sécante représentée par l'équation

$$y = mx$$

est

$$(A + Cm^2)\,x^2 + 2Dx + F = 0;$$

la demi-somme des racines est

$$\frac{-D}{A + Cm^2}.$$

On a donc, en appelant x_1, y_1 les coordonnées du milieu de la corde déterminée par cette sécante,

$$x_1 = \frac{-D}{A + Cm^2}, \qquad y_1 = -\frac{Dm}{A + Cm^2}.$$

Les coordonnées du milieu correspondant à une sécante dont le coefficient angulaire est m', sont de même

$$x_2 = \frac{-D}{A + Cm'^2}, \qquad y_2 = \frac{-Dm'}{A + Cm'^2}.$$

La droite qui joint ces deux points a pour équation

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -D & -Dm & A + Cm^2 \\ -D & -Dm' & A + Cm'^2 \end{vmatrix} = 0,$$

ou, en supprimant le facteur $m - m'$,

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -D & -Dm & A + Cm^2 \\ 0 & D & -C(m+m') \end{vmatrix} = 0,$$

ce qu'on peut écrire en supprimant le facteur D qu'on doit évidemment supposer différent de zéro,

$$x(Cmm' - A) - C(m + m')y - D = 0. \qquad (1)$$

Mais les directions (m, m') étant conjuguées par rapport à une conique C, on a entre m et m' une relation de la forme

$$\alpha + \beta(m + m') + \gamma mm' = 0. \qquad (2)$$

L'équation (1) renferme deux paramètres $m + m'$ et mm' qui n'entrent qu'au premier degré et qui sont liés linéairement par l'équation (2); la droite représentée par l'équation (1) passe donc par un point fixe dont on obtiendra les coordonnées x_0, y_0 en posant

$$\frac{Cx_0}{\gamma} = \frac{-Cy_0}{\beta} = \frac{-(Ax_0 + D)}{\alpha}.$$

Quand $\beta = 0$, le point fixe est sur l'axe des x. Réciproquement, si la droite (1) passe par un point fixe (x_0, y_0), on a

$$x_0(Cmm' - A) - Cy_0(m + m') - D = 0;$$

donc les directions m, m' sont conjuguées par rapport à une conique dont les directions asymptotiques sont définies par l'équation

$$(Ax_0 + D)x^2 + 2Cy_0xy - Cx_0\,y^2 = 0.$$

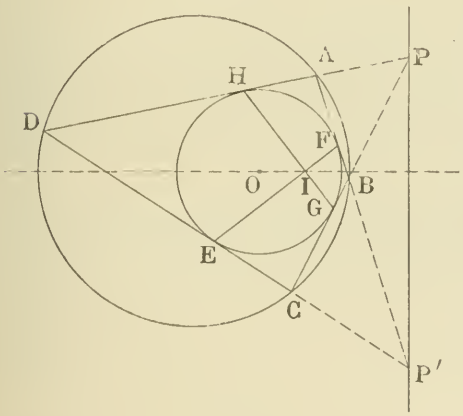
Ont résolu la même question : MM. Allard (lycée Condorcet); Auzeram (lycée Louis-le-Grand); Bourrienne (Rouen); S. Lattès (lycée de Marseille) L. Perrée (lycée Condorcet); G. Raynaud (lycée d'Alger); S. Théron (lycée Condorcet).

Nous avons encore reçu une autre solution, dans laquelle l'auteur fait d'abord remarquer que si l'on considère un cercle et deux cordes rectangulaires issues d'un point P, la droite qui joint les milieux de ces deux cordes passe par le milieu de la droite OP joignant le point P au centre O du cercle; puis il projette la figure sur un plan. Nous ferons remarquer que si la projection est cylindrique, les sécantes se transforment en sécantes conjuguées par rapport à la conique C′ elle-même; les coniques C et C′ sont donc confondues. Ce n'est qu'un cas particulier de la question proposée. Si la projection est oblique, le milieu d'une corde n'a pas pour transformé le milieu de la projection de cette corde; on obtient encore un autre théorème, dont nos lecteurs trouveront facilement l'énoncé.

---

129. — *On considère deux cercles* C, C′ *tels qu'il existe un quadrilatère inscrit à l'un et circonscrit à l'autre; trouver le lieu du centre de l'hyperbole équilatère circonscrite à l'un des quadrilatères inscrit à l'un des cercles et circonscrit à l'autre.*

On sait que s'il existe un quadrilatère inscrit à un cercle C et circonscrit à un cercle C′, il en existe une infinité, et, de plus, que les droites joignant les points de contact des côtés opposés passent par un point fixe situé sur la ligne des centres et sont perpendiculaires. (Voir, par exemple, la *Géométrie analytique* de Briot et Bouquet, n° 110.)



Soit un quadrilatère ABCD inscrit au cercle C et circonscrit au cercle C′; les droites EF et GH sont perpendiculaires et se coupent au point I; par suite les points de concours P et P′ des côtés opposés sont sur une perpendiculaire à OI, la polaire du point I par rapport au cercle C′ de centre O.

Prenons pour axe des x la droite OI et pour axe des y la perpendiculaire au point O. Soient R le rayon du cercle C′, α, β les coordonnées du point P, α, β' celles du point P′; α est constant, β et β' satisfont à la condition

$$\beta\beta' + \alpha^2 = 0, \qquad (1)$$

obtenue en écrivant que les polaires des points P et P′ sont perpendiculaires.

Les coniques circonscrites au quadrilatère ABCD peuvent être considérées comme passant par l'intersection des tangentes issues de P et de celles issues de P′. L'équation générale de ces coniques sera donc

$$(x^2 + y^2 - R^2)(\alpha^2 + \beta^2 - R^2) - (\alpha x + \beta y - R^2)^2 + \lambda\,[(x^2 + y^2 - R^2)(\alpha^2 + \beta'^2 - R^2) - (\alpha x + \beta' y - R^2)^2].$$

Écrivons qu'elle représente une hyperbole équilatère; on obtient

$$\alpha^2 + \beta^2 - 2R^2 + \mu\,[\alpha^2 + \beta'^2 - 2R^2] = 0,$$

et l'équation de l'hyperbole équilatère peut s'écrire

$$(\alpha^2 + \beta'^2 - 2R^2)\,[(x^2 + y^2 - R^2)(\alpha^2 + \beta^2 - R^2) - (\alpha x + \beta y - R^2)^2]$$
$$- [\alpha^2 + \beta^2 - 2R^2]\,[(x^2 + y^2 - R^2)(\alpha^2 + \beta'^2 - R^2) - (\alpha x + \beta' y - R^2)^2] = 0.$$

Le premier membre s'annulant pour $\beta = \beta'$ sera divisible par $\beta - \beta'$, et il est aisé de grouper les

termes de façon à mettre en évidence ce facteur. Pour cela il est utile d'ordonner par rapport à β et β'; ainsi on peut écrire

$$(\beta'^2 + \alpha^2 - 2R^2)[\beta^2(x^2 - R^2) - 2\beta y(\alpha x - R^2) - R^2x^2 + y^2(\alpha^2 - R^2) + 2R^2\alpha x - R^2\alpha^2]$$
$$- (\beta^2 + \alpha^2 - 2R^2)[\beta'^2(x^2 - R^2) - 2\beta' y(\alpha x - R^2) - R^2x^2 + y^2(\alpha^2 - R^2) + 2R^2\alpha x - R^2\alpha^2] = 0.$$

En retranchant les termes correspondants des deux lignes, on obtient

$$- 2\beta\beta'(\beta' - \beta)\, y(\alpha x - R^2) + (\beta'^2 - \beta^2)[- R^2x^2 + y^2(\alpha^2 - R^2) + 2R^2\alpha x - R^2\alpha^2]$$
$$+ (\beta^2 - \beta'^2)(\alpha^2 - 2R^2)(x^2 - R^2) - 2(\beta - \beta')y(\alpha x - R^2)(\alpha^2 - 2R^2) = 0.$$

Divisons par $\beta - \beta'$, remplaçons $\beta\beta'$ par $-\alpha^2$, et posons $\beta + \beta' = \lambda$, on obtient l'équation suivante :

$$\lambda(\alpha^2 - R^2)x^2 - \lambda(\alpha^2 - R^2)y^2 - 4\alpha(\alpha^2 - R^2)xy - 2\lambda R^2\alpha x + 4R^2(\alpha^2 - R^2)y + 2R^4\lambda = 0.$$

Nous aurons le lieu du centre en éliminant λ entre les deux équations

$$\lambda(\alpha^2 - R^2)x - 2\alpha(\alpha^2 - R^2)y - \lambda R^2\alpha = 0,$$
$$- 2\alpha x - \lambda y + 2R^2 = 0,$$

ce qui donne l'équation

$$\alpha(\alpha^2 - R^2)(x^2 + y^2) - R^2(2\alpha^2 - R^2)x + R^4\alpha = 0.$$

Le lieu est un cercle dont le centre est sur Ox, et qui passe par le point I, car pour $y = 0$, l'équation donne les deux valeurs de x, $x' = \frac{R^2}{\alpha}$ (abscisse du point I) et $x'' = \frac{\alpha R^2}{\alpha^2 - R^2}$.

AUDIBERT, à Marseille.

---

128. — *On considère le cercle* Γ *inscrit et le cercle* C *circonscrit à un triangle; il existe une infinité d'autres triangles* T *inscrits dans le cercle* C *et circonscrits au cercle* Γ; *trouver le lieu du centre et l'enveloppe du cercle autopolaire par rapport à un triangle* T: *montrer que ce cercle est vu de deux points fixes sous des angles constants.*

Prenons pour axe des x la droite qui joint les centres des cercles donnés, et pour axe des y une perpendiculaire passant par le centre du cercle inscrit. Les équations des deux cercles seront

$$x^2 + y^2 - r^2 = 0, \qquad (\Gamma)$$
$$(x - d)^2 + y^2 - R^2 = 0, \qquad (C)$$

et l'on a la relation

$$d^2 = R^2 - 2Rr,$$

puisqu'il existe un triangle circonscrit à Γ et inscrit dans C.

Soit maintenant
$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \gamma = 0 \qquad (S)$$
l'équation d'un des cercles autopolaires considérés. J'écris qu'il existe un triangle autopolaire par rapport à S et inscrit dans C; il suffit d'annuler un des invariants simultanés, et l'on obtient

$$2\gamma - \alpha^2 - \beta^2 - 2d\alpha - 2Rr = 0. \qquad (1)$$

De même, en écrivant qu'il existe un triangle autopolaire par rapport à S et circonscrit à Γ, on obtient

$$\gamma - 2r^2 = 0. \qquad (2)$$

Tirons γ de (2), et remplaçons dans (1), il vient

$$\alpha^2 + \beta^2 + 2d\alpha + 2Rr - 4r^2 = 0, \qquad (3)$$

équation du lieu du centre, qu'on peut écrire

$$(x + d)^2 + y^2 - (R - 2r)^2 = 0.$$

Ce lieu est un cercle aisé à construire.

Pour avoir l'enveloppe du cercle S, je remplace dans son équation γ par $2r^2$, ce qui donne

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + 2r^2 = 0, \tag{4}$$

et j'élimine α et β entre les équations (4), (3) et (5)

$$\frac{\alpha + d}{x} = \frac{\beta}{y}. \tag{5}$$

On obtient sans peine

$$(x^2 + y^2)^2 + 4(x^2 + y^2)(dx + 2\mathrm{R}r - 3r^2) + 8dr^2x - 4d^2y^2 + 4r^4 = 0. \tag{6}$$

C'est l'équation d'une quartique bicirculaire. On peut même remarquer que c'est une cartésienne, c'est-à-dire une quartique qui admet les points cycliques pour points de rebroussement.

En effet, la condition (1) exprime que le cercle S coupe orthogonalement le cercle qui a pour équation

$$x^2 + y^2 = 2r^2.$$

D'autre part, le centre du cercle S décrit un cercle; par suite, l'enveloppe de ce cercle est, comme on sait, une cartésienne. D'ailleurs, l'équation (6) peut s'écrire

$$(x^2 + y^2 + 2dx + 4\mathrm{R}r - 6r^2 - 2d^2)^2 + 8dx(4r^2 + d^2 - 2\mathrm{R}^2) + (4\mathrm{R}^4 - 4\mathrm{R}r - 6r^2 - 2d^2)^2 = 0.$$

ou

$$\mathrm{K}^2 + \mathrm{P} = 0,$$

K étant le premier membre de l'équation d'un cercle et P le premier membre de l'équation d'une droite. On reconnaît là l'équation d'une ovale de Descartes.

Je dis maintenant que les cercles S sont vus de deux points fixes sous des angles constants.

Écrivons pour cela que d'un point (x, y) on voit le cercle S sous un angle 2V, c'est-à-dire que $\operatorname{tg}^2 \mathrm{V}$ est égal au rapport du carré du rayon à la puissance du point par rapport au cercle; on obtient

$$\operatorname{tg}^2 \mathrm{V} = \frac{\alpha^2 + \beta^2 - 2r^2}{x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + 2r^2}$$

ou

$$\alpha^2 + \beta^2 + 2\operatorname{tg}^2 \mathrm{V}(\alpha x + \beta y) - (x^2 + y^2 + 2r^2)\operatorname{tg}^2 \mathrm{V} - 2r^2 = 0. \tag{7}$$

Cette relation doit avoir lieu pour toutes les valeurs de α et de β satisfaisant à (3); par suite, les équations (7) et (3) doivent avoir leurs coefficients proportionnels, ce qui donne

$$y = 0,$$
$$x \operatorname{tg}^2 \mathrm{V} = d,$$
$$-(x^2 + 2r^2)\operatorname{tg}^2 \mathrm{V} - 2r^2 = 2\mathrm{R}r - 4r^2.$$

De la seconde, on tire $x = \dfrac{d}{\operatorname{tg}^2 \mathrm{V}}$, et remplaçant dans la dernière, il vient

$$2r^2 \operatorname{tg}^4 \mathrm{V} + 2r(\mathrm{R} - r)\operatorname{tg}^2 \mathrm{V} + d^2 = 0.$$

Cette équation donne deux valeurs pour $\operatorname{tg}^2 \mathrm{V}$, à chacune desquelles correspond un point de coordonnées $\left(\dfrac{d}{\operatorname{tg}^2 \mathrm{V}}, 0\right)$; et de ce point on voit tous les cercles S sous un angle 2V.

A. Blondel, lycée d'Amiens.

M. L. Perrée, lycée Condorcet, a résolu la même question.

---

130. — *Pour que deux normales à une surface du second degré soient concourantes, il faut et il suffit que la droite qui joint les pieds de ces normales soit perpendiculaire à sa conjuguée.*

La question peut s'énoncer plus simplement sans introduire une surface du deuxième degré:

Pour que deux normales à deux plans soient concourantes, il faut et il suffit que la droite qui joint les pieds de ces normales soit perpendiculaire à l'intersection des deux plans.

La condition est nécessaire, car si les normales se rencontrent, le plan de ces deux droites est perpendiculaire à l'intersection des deux plans; par suite, la droite qui joint les pieds, étant dans ce plan, est perpendiculaire à l'intersection.

La condition est suffisante, car si la droite qui joint les pieds A et B est perpendiculaire à l'intersection I des deux plans, on peut mener par la droite AB un plan perpendiculaire à I, et ce plan perpendiculaire aux deux plans contiendra les deux normales en A et B.

Analytiquement, soient x_1, y_1, z_1 les coordonnées du point A, x_2, y_2, z_2 celles du point B, et

$$\frac{x - x_1}{a_1} = \frac{y - y_1}{b_1} = \frac{z - z_1}{c_1}, \qquad \frac{x - x_2}{a_2} = \frac{y - y_2}{b_2} = \frac{z - z_2}{c_2},$$

les équations des deux normales.

On sait que la condition pour que ces deux droites soient dans un même plan est

$$\begin{vmatrix} x_1 - x_2 & a_1 & a_2 \\ y_1 - y_2 & b_1 & b_2 \\ z_1 - z_2 & c_1 & c_2 \end{vmatrix} = 0$$

ou
$$(x_1 - x_2)(b_1c_2 - c_1b_2) + (y_1 - y_2)(c_1a_2 - a_1c_2) + (z_1 - z_2)(a_1b_2 - b_1a_2) = 0;$$

c'est aussi la condition pour que la droite AB dont les paramètres directeurs sont proportionnels à $x_1 - x_2$, $y_1 - y_2$, $z_1 - z_2$ soit perpendiculaire à l'intersection des deux plans perpendiculaires aux normales, qui a pour paramètres $b_1c_2 - c_1b_2$, $c_1a_2 - a_1c_2$, $a_1b_2 - b_1a_2$.

Le théorème subsiste si les points A et B ne sont pas situés dans les deux plans.

Numa Baudouin, lycée d'Alger.

[Ont résolu la même question : MM. A. Barriol : L. Boé, à Tarbes; Blondel, lycée d'Amiens; J. Hais, lycée Hoche; L. Perrée, Condorcet; R. Lévy, Janson de Sailly ; L. Salle, lycée d'Alger.]

---

132. — *Étant donnés une conique à centre et un point* A *sur cette conique :*

1° On mène un diamètre variable Δ *et l'on fait passer un cercle par le point* A *et les extrémités de ce diamètre. Trouver le lieu du point de rencontre* M *du diamètre* Δ *avec la droite joignant le point* A *au quatrième point d'intersection de la conique et du cercle. Ce lieu est une conique* (C). *Construire cette conique.*

2° Déterminer la position du point A *pour que* (C) *passe par un point donné* H. *Dans quelle région du plan doit se trouver* H *pour que* A *soit réel?*

3° A chaque point H *correspondent deux points* A, *soient* A_1, A_2. *Lieu de* H *tel que le milieu de* A_1A_2 *coïncide avec* H.

4° Trouver l'enveloppe de la polaire des points M *de* (C) *par rapport à la conique donnée* [*polaire réciproque de* (C)].

5° Lieu des foyers de l'enveloppe trouvée quand le point A *décrit la conique donnée.*

1° L'équation de la conique donnée, rapportée à ses axes de symétrie, étant

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\varepsilon b^2} - 1 = 0, \qquad (\varepsilon = \pm 1),$$

soit $y = mx$ l'équation d'un diamètre. Si les coordonnées du point donné A sont x_1, y_1, la droite AM, joignant le point A à un point du lieu a, comme on sait, pour coefficient angulaire $-m$; son équation est donc

$$y - y_1 + m(x - x_1) = 0.$$

On aura par suite l'équation du lieu de M en remplaçant dans l'équation précédente m par $\frac{y}{x}$, ce qui donne

$$2xy - xy_1 - yx_1 = 0,$$

équation d'une hyperbole équilatère passant par le point A et par l'origine, ayant son centre au milieu de OA et ses asymptotes parallèles aux axes de la conique donnée. C'est l'hyperbole d'Apollonius relative à un point facile à déterminer de la normale en A à la conique donnée. Ce premier lieu est indépendant de la conique; c'était évident *a priori*.

2° Pour que l'hyperbole trouvée passe par un point H de coordonnées α, β, il faut que le point A soit sur la droite (D) représentée par l'équation

$$2\alpha\beta - \beta x - \alpha y = 0.$$

Il y aura donc en général deux points A_1, A_2 répondant à la question. D'ailleurs le point H est sur la droite A_1A_2; le point H étant donné, on construit facilement la droite A_1A_2 en remarquant que cette droite et la droite OH ont des coefficients angulaires égaux et de signes contraires.

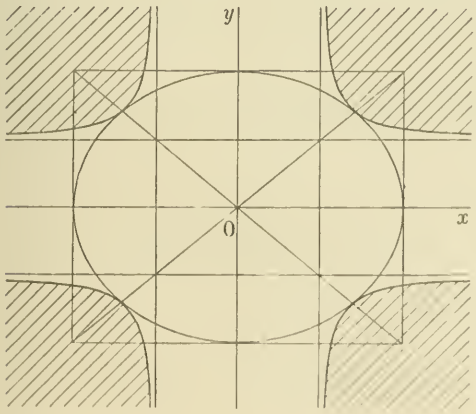
Pour que les points A_1, A_2 soient réels, il faut et il suffit que la droite D coupe la conique donnée. La condition est

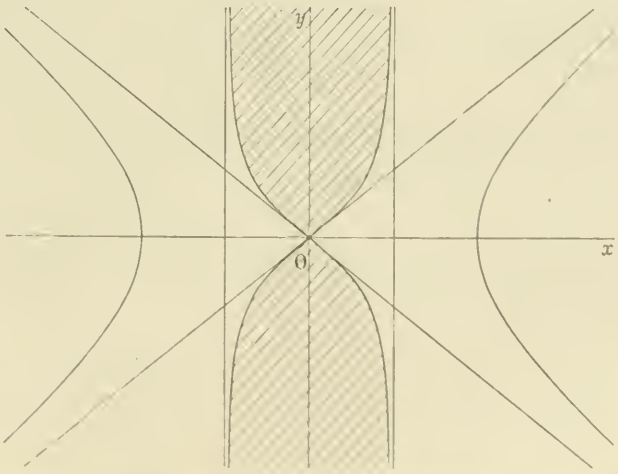
$$\frac{4x^2y^2}{\varepsilon a^2b^2} - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{\varepsilon b^2} < 0.$$

Soit d'abord $\varepsilon = +1$; la conique donnée est une ellipse. La courbe séparatrice a pour équation

$$\frac{4x^2y^2}{a^2b^2} - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0;$$

c'est la Kreuzcurve, lieu des milieux des segments qu'une tangente à l'ellipse intercepte sur ses axes. Cette courbe est bien connue, elle a quatre asymptotes parallèles aux axes, et ayant respectivement pour équations $x = \pm\frac{a}{2}$, $y = \pm\frac{b}{2}$; enfin elle touche l'ellipse en quatre points qui sont les extrémités des diamètres conjugués égaux de l'ellipse.





Si l'on suppose $y = 0$, $x \neq 0$, le premier membre de l'équation précédente est négatif: donc si le point H est dans la région couverte de hachures, les points A_1, A_2 sont imaginaires. Pour que les points A_1, A_2 soient réels, il faut et il suffit que le point H soit dans la région qui comprend le centre.

Soit maintenant $\varepsilon = -1$; l'équation de la courbe séparatrice est alors

$$\frac{4x^2y^2}{a^2b^2} + \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0.$$

La courbe est entièrement comprise dans les angles des asymptotes de l'hyperbole donnée extérieurs à cette hyperbole; les tangentes à l'origine sont les asymptotes de l'hyperbole; enfin la courbe a deux asymptotes définies par $x = \pm \frac{a}{2}$. On voit immédiatement que le point H doit se trouver dans la région non couverte de hachures, pour que les points A_1, A_2 soient réels.

3° Pour que le point H soit le milieu de A_1A_2, il faut et il suffit que les droites OH et A_1A_2 aient des directions conjuguées; donc on doit avoir

$$\frac{\beta^2}{\alpha^2} = \frac{b^2}{\varepsilon a^2}.$$

Le lieu n'est réel que dans le cas de l'ellipse; et il se compose de deux diamètres conjugués égaux de l'ellipse; les parties de ces diamètres qui sont intérieures à l'ellipse conviennent seules à des points A réels.

4° Les coordonnées du point M vérifiant les deux équations

$$y - mx = 0,$$

$$y + mx = y_1 + mx_1,$$

on a

$$x = \frac{y_1 + mx_1}{2m}, \quad y = \frac{y_1 + mx_1}{2};$$

par suite la polaire du point M par rapport à la conique donnée a pour équation

$$\frac{x(y_1 + mx_1)}{2a^2m} + \frac{y(y_1 + mx_1)}{2\varepsilon b^2} = 1 \tag{1}$$

ou, en ordonnant par rapport à m,

$$m^2a^2yx_1 + m(\varepsilon b^2xx_1 + a^2yy_1 - 2\varepsilon a^2b^2) + \varepsilon b^2xy_1 = 0.$$

L'enveloppe de cette droite a pour équation

$$(\varepsilon b^2xx_1 + a^2yy_1 - 2\varepsilon a^2b^2)^2 - 4\varepsilon a^2b^2x_1y_1xy = 0$$

ou

$$(\varepsilon b^2xx_1 - a^2yy_1)^2 - 4\varepsilon a^2b^2(\varepsilon b^2xx_1 + a^2yy_1 - \varepsilon a^2b^2) = 0.$$

Cette équation représente une parabole tangente aux axes coordonnés, la corde de contact ayant pour équation

$$\varepsilon b^2xx_1 + a^2yy_1 - 2\varepsilon a^2b^2 = 0.$$

L'origine est donc un point de la directrice, et comme l'axe a pour coefficient angulaire $\frac{\varepsilon b^2x_1}{a^2y_1}$, la directrice a pour équation

$$\varepsilon b^2x_1y + a^2y_1x = 0.$$

5° Pour avoir le lieu du foyer de cette parabole, il suffit de chercher le lieu du pied de la perpendiculaire abaissée de l'origine sur la polaire de l'origine. On aura donc l'équation du lieu du foyer en éliminant x_1 et y_1 entre les équations

$$\varepsilon b^2xx_1 + a^2yy_1 - 2\varepsilon a^2b^2 = 0, \tag{2}$$

$$\varepsilon b^2x_1y - a^2y_1x = 0, \tag{3}$$

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{\varepsilon b^2} = 1. \tag{4}$$

On peut procéder d'une autre manière. L'équation (1) représente une tangente à la parabole: son coefficient angulaire étant égal à $-\frac{\varepsilon b^2}{a^2m}$, posons $-\frac{\varepsilon b^2}{a^2m} = i$, ce qui donne $m = \frac{\varepsilon b^2}{a^2}i$; l'équation (1) devient, pour cette valeur de m,

$$\left(y_1 + \frac{\varepsilon b^2}{a^2}x_1 i\right)(y - ix) = 2\varepsilon b^2.$$

Le point réel situé sur cette droite est le foyer de la parabole qui correspond au point (x_1, y_1); ses coordonnées sont déterminées par les équations (2) et (3). On en déduit immédiatement

$$\frac{x_1}{a} = \frac{2ax}{x^2 + y^2}, \qquad \frac{y_1}{b} = \frac{2\varepsilon by}{x^2 + y^2}.$$

Le lieu du foyer a donc pour équation

$$(x^2 + y^2)^2 = 4(a^2x^2 + \varepsilon b^2y^2).$$

Cette courbe est la podaire du centre de la conique homothétique et concentrique à la proposée ayant des axes doubles.

Dans le cas particulier où la conique proposée est une hyperbole équilatère, le lieu est une lemniscate.

(Ont résolu la question : MM. Audibert (Marseille); Audoin (lycée de Bordeaux); le capitaine Barisien; Nuna Bautoin (lycée d'Alger); Bergman (lycée Saint-Louis); L. Boë; A. Blondel (lycée d'Amiens); Gérard (lycée Saint-Louis); R. Lévy (lycée Janson de Sailly); L. Perrée (lycée Condorcet.)

SOLUTION GÉOMÉTRIQUE

1° La droite AM et le diamètre Δ étant également inclinés sur les axes de la conique donnée, le lieu du point M est l'hyperbole équilatère passant par les points O et A et dont les asymptotes sont les parallèles aux axes menées par le milieu de OA. On sait, en effet, que les droites qui joignent un point quelconque d'une hyperbole équilatère aux extrémités d'un de ses diamètres sont également inclinées sur les asymptotes.

2° Pour que l'hyperbole (C) passe par un point donné H, il faut donc évidemment que le point A soit situé sur la corde menée par H et faisant avec les axes les mêmes angles que OH. On a ainsi deux solutions. Elles sont réelles tant que le point H se déplaçant sur OH est compris entre les tangentes à la conique également inclinées que OH sur les axes : les points extrêmes ainsi obtenus sont donc les milieux des segments des tangentes considérées compris entre les axes : le lieu de ces points quand les tangentes varient constitue la séparatrice cherchée.

Or, si nous transformons homographiquement la figure de sorte que les points à l'infini des axes deviennent les points cycliques, la courbe cherchée a pour transformée la podaire d'une hyperbole équilatère par rapport à son centre, c'est-à-dire une lemniscate de Bernouilli.

La séparatrice cherchée est donc facile à étudier : elle présente à l'origine un point double dont les tangentes sont les asymptotes de la conique considérée : elle a quatre asymptotes parallèles aux axes, et passant par les milieux des demi-axes. Cette quartique touche la conique donnée aux extrémités des diamètres conjugués égaux, quand cette conique est une ellipse.

Suivant que la conique donnée est une ellipse ou une hyperbole, la séparatrice aura donc deux formes très différentes.

3° Pour que le milieu de A_1A_2 coïncide avec H, il faut évidemment que le point H soit sur un des diamètres conjugués également inclinés sur les axes.

4° La polaire réciproque de (C) par rapport à la conique donnée sera évidemment une parabole tangente aux axes et à la tangente au point A, et, le centre de (C) étant le milieu de OA, la polaire du point O par rapport à cette parabole sera parallèle à la tangente en A, et deux fois plus éloignée du centre.

5° Le foyer de cette parabole sera évidemment la projection du point O sur cette polaire, c'est-à-dire le symétrique de ce point par rapport à la tangente en A. Le lieu de ce foyer sera donc la podaire de la conique concentrique et homothétique à la conique donnée, et de longueurs d'axes doubles, par rapport à son centre.

Ernest Duporcq, école Monge.

(Ont envoyé des solutions géométriques : MM. Auzeram (lycée Louis-le-Grand); A. Blondel (lycée d'Amiens); R. Lévy (lycée Janson de Sailly)

135. — *Soient* A, B *et* C, D *deux couples de sommets opposés d'un quadrilatère circonscrit à un cercle. Trouver le lieu des points de rencontre des tangentes communes aux coniques ayant pour foyers* A *et* B *et aux coniques ayant pour foyers* C *et* D.

Prenons deux axes rectangulaires passant par le centre du cercle.

Soient $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$, $D = 0$ les équations (en coordonnées tangentielles) des quatre points donnés. Les équations tangentielles des coniques ayant pour foyers A et B, et C, D respectivement, sont

$$AB + \lambda(u^2 + v^2) = 0, \qquad CD + \mu(u^2 + v^2) = 0.$$

Ces coniques déterminent un faisceau tangentiel ayant pour équation

$$\alpha[AB + \lambda(u^2 + v^2)] + \beta[CD + \mu(u^2 + v^2)] = 0. \qquad (1)$$

L'équation tangentielle du cercle donné est de la forme

$$w^2 - R^2(u^2 + v^2) = 0;$$

mais ce cercle étant inscrit dans le quadrilatère ABCD, son équation est aussi de la forme

$$CD - kAB = 0.$$

On a donc
$$CD - kAB \equiv l[w^2 - R^2(u^2 + v^2)]$$
ou bien
$$CD \equiv k.AB + l[w^2 - R^2(u^2 + v^2)].$$

Remplaçant CD par cette expression, l'équation (1) devient

$$(\alpha + k\beta)AB + \beta l w^2 + [\alpha\lambda + \beta(\mu - lR^2)](u^2 + v^2) = 0,$$

équation de la forme
$$a.AB + b(u^2 + v^2) + cw^2 = 0, \qquad (2)$$

a, b, c désignant des constantes arbitraires. Il s'agit de trouver le lieu des coniques de ce faisceau tangentiel qui se réduisent à deux points.

Soit donc
$$a.AB + b(u^2 + v^2) + cw^2 \equiv P.Q,$$

$P = 0$, $Q = 0$, étant les équations tangentielles de deux points P, Q. L'identité précédente peut se mettre sous la forme

$$a.AB + b(u^2 + v^2) \equiv PQ - cw^2;$$

elle exprime que la conique représentée par l'équation

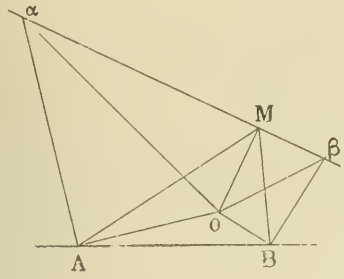
$$a.AB + b(u^2 + v^2) = 0$$

qui a pour foyers A et B est tangente en P et Q aux droites qui joignent le centre du cercle donné aux points P, Q. Donc le lieu demandé est le même que celui des points de contact des tangentes menées par un point à une conique ayant pour foyers deux points donnés. Ce lieu est, comme on sait, une strophoïde.

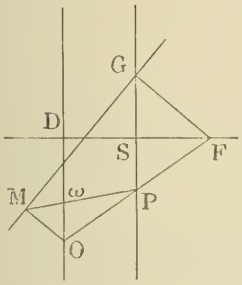
SOLENTE, lycée Louis-le-Grand.

SOLUTION GÉOMÉTRIQUE. — Soit M un point du lieu; le faisceau des tangentes issues de M a mêmes bissectrices que le faisceau des droites MA et MB et aussi que le faisceau des droites MC, MD; donc ces deux faisceaux de droites ont les mêmes bissectrices. Or ces deux couples de droites appartiennent au faisceau involutif des tangentes menées de M aux coniques inscrites dans le quadrilatère ABCD. Il s'ensuit que tous les couples de tangentes issues de M ont mêmes bissectrices; or l'une de ces coniques est le cercle inscrit au quadrilatère; donc l'une de ces bissectrices passe par le centre O de ce cercle. Réciproquement, je dis que si la bissectrice de l'angle AMB passe par le point O, M est un point du lieu. En effet, considérons deux droites passant par M et également inclinées sur MO; il existe une conique du premier faisceau et une du second, tangentes à ces deux droites. La question est ainsi ramenée à celle-ci :

Trouver le lieu des points M *tels que la bissectrice de l'angle* AMB *passe par le point donné* O. Je dis que le lieu est un strophoïde. En effet, considérons une droite passant par le point O, la droite joignant à A le symétrique de B par rapport à cette droite, la rencontre un un point M qui appartient au lieu; d'ailleurs ce point est le point de contact d'une tangente menée de O à une conique ayant pour foyers A et B; ce lieu est bien connu.



On peut trouver directement ce lieu de la manière suivante. Menons les droites Aα et Bβ respectivement perpendiculaires à OA et OB et soient α et β les points où elles rencontrent la seconde bissectrice de AMB; les quadrilatères AOMα et BOMβ étant inscriptibles, on voit que les triangles AOα, BOβ sont semblables, car les angles AαO BβO respectivement égaux aux angles AMO et BMO sont égaux; donc $\frac{A\alpha}{B\beta} = \frac{AO}{BO}$. La droite variable αβ détermine donc sur deux droites fixes des segments Aα, Bβ proportionnels à OA et OB; elle enveloppe par suite une parabole; les bissectrices de l'angle AOB sont évidemment des tangentes à la parabole; donc le point O est un point de la directrice et par suite le lieu cherché est la polaire d'une parabole par rapport à un point de sa directrice; c'est une strophoïde, car soient F le foyer, S le sommet de la parabole, D le pied de la directrice, G un point de la tangente au sommet; la tangente correspondante est perpendiculaire à FG. Du point O pris sur la directrice abaissons la perpendiculaire OM sur cette tangente; tirons OF qui rencontre la tangente au sommet en P; PM rencontre la directrice au point ω. Le triangle MOω est isocèle car les angles MOω et OMω sont tous deux égaux à l'angle PGF; le lieu de M est donc une strophoïde ayant pour point double le point O.



Remarque. — Si les points A et B restent fixes, le rayon du cercle O variant, les points C et D se déplacent mais restent sur la strophoïde; de même si C et D se déplacent, A et B se meuvent sur la strophoïde. Il y a donc sur cette strophoïde une infinité de systèmes de quatre points formant un quadrilatère circonscrit à un cercle ayant pour centre le point double. Les tangentes communes à deux coniques ayant pour foyers les points ainsi définis se rencontrent sur la strophoïde.

A. Alayrac (lycée Saint-Louis).

Autre solution par M. L. Perrée (lycée Condorcet). M. Perrée remarque que si les points A, B, C, D sont quelconques, les segments AC, BD sont vus d'un point M du lieu sous le même angle; le lieu de M est une cubique; cette cubique est une strophoïde quand les points A, B, C, D sont les sommets d'un quadrilatère circonscrit à un cercle.

M. L. Randon a envoyé aussi une solution très correcte.

---

139. — *On donne la courbe représentée par l'équation*

$$y = x^3$$

(axes rectangulaires).

On mène à cette courbe des tangentes par un point P.

1° Trouver dans quelle région doit se trouver le point P *pour que les tangentes soient réelles;*

2° Trouver l'équation du cercle C *passant par les points de contact;*

3° Lieu du point P *quand le cercle* C *passe par l'origine.*

La première polaire du point $P(\alpha, \beta)$ a pour équation

$$3\alpha x^2 - 2y - \beta = 0; \tag{1}$$

par conséquent, l'équation aux abscisses des points de contact des tangentes issues du point P est

$$2x^3 - 3\alpha x^2 + \beta = 0.$$

Pour que ces tangentes soient réelles, il faut et il suffit que l'équation précédente ait ses trois racines réelles. La condition de réalité est $\beta(\beta - \alpha^3) \leqslant 0$; ce qui exprime que le point P doit se trouver dans la région du plan comprise entre l'axe des x et la courbe.

2° Les coordonnées d'un des points de contact des tangentes issues du point P vérifiant l'équation (1), vérifient aussi l'équation $3\alpha x^3 - 2xy - \beta x = 0$, et par suite, l'équation obtenue en remplaçant x^3 par y, savoir :

$$2xy + \beta x - 3\alpha y = 0. \tag{2}$$

Les points de contact sont donc les points à distance finie communs aux deux coniques représentées par les équations (1) et (2); ces coniques ont un point commun à l'infini dans la direction de l'axe des y; pour nous débarrasser de ce point, écrivons ainsi les équations (1) et (2) :

$$3\alpha x^2 = 2y + \beta, \qquad x(2y + \beta) = 3\alpha y,$$

et divisons membre à membre; nous obtenons l'équation

$$\frac{3\alpha x}{2y + \beta} = \frac{2y + \beta}{3\alpha y} \qquad \text{ou} \qquad (2y + \beta)^2 - 9\alpha^2 xy = 0,$$

qui représente une conique passant par les points à distance finie communs aux deux premières. Cette équation développée devient

$$9\alpha^2 xy - 4y^2 - 4\beta y - \beta^2 = 0; \tag{3}$$

l'axe des y n'est plus direction asymptotique. Les coniques représentées par les équations (1), (2), (3) ont donc trois points communs; l'équation

$$\lambda(3\alpha x^2 - 2y - \beta) + \mu(2xy + \beta x - 3\alpha y) + \nu(9\alpha^2 xy - 4y^2 - 4\beta y - \beta^2) = 0$$

est l'équation générale des coniques passant par ces points; elle représentera un cercle si λ, μ, ν vérifient les conditions

$$3\alpha\lambda = -4\nu, \qquad 2\mu + 9\alpha^2\nu = 0.$$

On peut prendre $\nu = -1$, et par suite $\lambda = +\frac{4}{3\alpha}$, $\mu = +\frac{9\alpha^2}{2}$; l'équation du cercle demandé est donc la suivante :

$$4(x^2 + y^2) + \frac{9\alpha^2\beta x}{2} + \left(4\beta - \frac{27}{2}\alpha^3 - \frac{8}{3\alpha}\right)y + \beta\left(\beta - \frac{4}{3\alpha}\right) = 0.$$

3° Pour que le cercle passe par l'origine, il faut que l'on ait

$$\beta(3\alpha\beta - 4) = 0,$$

c'est-à-dire que le point P soit sur l'axe des x ou sur une hyperbole représentée par l'équation $3xy - 4 = 0$. Si le point P est sur l'axe des x, deux des points de contact se confondent avec l'origine; aussi le cercle, représenté par l'équation $4(x^2 + y^2) - \left(\frac{27}{2}\alpha^3 + \frac{8}{3\alpha}\right)y = 0$ est-il tangent à l'axe des x.

Ont résolu la question : MM. Audibert (Marseille); Audoin (lycée de Bordeaux); le capitaine Barisien; Bourbienne (lycée de Rouen); Ed. Gautier (lycée de Bordeaux); Gérard (lycée Saint-Louis); Hais (lycée de Versailles); Vazou (Falaise).

140. — *On considère toutes les circonférences* C *pour lesquelles le point* P *est le pôle de la droite* D. *1° Les axes radicaux des circonférences* C *et d'une circonférence donnée* C′ *passent par un point fixe* A ; *2° Lieu du point* A *quand la circonférence* C′ *varie.*

Solution analytique. — Prenons pour origine le point P, pour axe des y la parallèle à la droite D menée par P et pour axe des x la perpendiculaire à la droite D menée par ce point P. La circonférence C a pour équation

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x + \beta = 0.$$

La polaire de l'origine, qui a pour équation $\alpha x - \beta = 0$, devant coïncider avec la droite D que nous représenterons par l'équation $x - a = 0$, on doit prendre $\beta = a\alpha$. L'équation générale des cercles C est par suite

$$x^2 + y^2 - \alpha(2x - a) = 0,$$

α désignant un paramètre arbitraire.

L'équation d'un second cercle C′ est

$$x^2 + y^2 - 2xx_0 - 2yy_0 + b = 0.$$

L'axe radical des deux cercles C, C′ a pour équation

$$2xx_0 + 2yy_0 - b - \alpha(2x - a) = 0\,;$$

il passe donc par un point fixe A situé à l'intersection des droites représentées par les équations

$$x = \frac{a}{2}, \qquad 2xx_0 + 2yy_0 - b = 0.$$

La première est la droite Δ parallèle à D et équidistante de D et du point P; la seconde est l'axe radical du cercle C′ et du cercle de rayon nul ayant pour centre le point P. La droite Δ étant fixe, on voit que le point A décrit cette droite quand la circonférence C′ varie.

J. Hais (lycée Hoche).

[Ont envoyé des solutions exactes MM. A. Audoin, (lycée de Bordeaux) ; E. N. Barisien ; Bourrienne. (lycée de Rouen) ; Cot D. (lycée de Poitiers) ; Edmond Galtier, (lycée de Bordeaux); Gérard, (lycée Saint-Louis); L. Perrée, (lycée Condorcet); R. Lévy, (lycée Janson de Sailly); Wartan Manug David, (Bucaresti.)

Solution géométrique. — Considérons la droite Δ parallèle à D et équidistante de D et du point P; c'est l'axe radical du cercle C et du cercle de rayon nul ayant pour centre le point P. Soit A l'intersection de la droite Δ avec l'axe radical des cercles C, C′ ; ce point est le centre radical du système formé par les cercles C, C′ et le cercle-point P ; ce dernier et le cercle C′ étant fixes, le point A est fixe. En outre quand le cercle C′ varie, le point A décrit la droite fixe Δ.

J. Hais (lycée Hoche).

[Solution analogue par M. Bourrienne (Rouen).]

Seconde solution géométrique. — Soient I, J les points cycliques du plan, A et B les points d'intersection (imaginaires) de la droite D et des droites isotropes PI, PJ. Considérons l'un quelconque C_1 des cercles de la famille C ; comme la droite D est la polaire de P et comme ce cercle passe par I, il passe par le point conjugué harmonique de I par rapport à P et A, c'est-à-dire par le milieu N du segment PA; il passe aussi par le milieu N′ du segment PB. Les cercles C ont donc deux points communs fixes, situés sur la droite Δ parallèle à D et équidistante de D et du point P.

Cela posé, considérons le cercle C_1 et le cercle C′, leur axe radical coupe Δ en un point M qui est fixe, car si C_2 est un second cercle de la famille C, on voit que M est le centre radical des cercles C_1, C_2, C′ et par suite il est sur l'axe radical de C′ et C_2. Enfin le lieu de M est évidemment la droite Δ.

Cot. D. (lycée de Poitiers).

---

142. — *Soit une ellipse* E. *Par un point* P *de son plan, on lui mène quatre normales dont les pieds sont les points* A, B, C, D. *Les droites* PA, PB, PC, PD *coupent de nouveau l'ellipse en* A′, B′, C′, D′. *Déterminer le lieu du point* P *de manière que les points* A′, B′, C′, D′ *soient sur un cercle.*

Soit PM l'une des normales issues du point P (α, β) ; M étant le pied de cette normale et M′ le second point où elle rencontre l'ellipse ; désignons par (x, y) les coordonnées du point M′ : par x', y'

celles du point M et posons

$$x' = \frac{x + \lambda\alpha}{1 + \lambda}, \qquad y' = \frac{y + \lambda\beta}{1 + \lambda};$$

nous allons déterminer λ en écrivant que le point M est sur l'ellipse

$$\frac{(x + \lambda\alpha)^2}{a^2} + \frac{(y + \lambda\beta)^2}{b^2} - (1 + \lambda)^2 = 0;$$

en tenant compte de la condition $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$, on trouve $\lambda = 0$, solution qui correspond au point M', et

$$\lambda = -\frac{2\left(\frac{\alpha x}{a^2} + \frac{\beta y}{b^2} - 1\right)}{\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} - 1}.$$

Or, le point M étant sur l'hyperbole d'Apollonius relative au point P, on a encore

$$c^2x'y' + b^2\beta x' - a^2\alpha y' = 0,$$

c'est-à-dire $\qquad c^2(x + \lambda\alpha)(y + \lambda\beta) + [b^2\beta(x + \lambda\alpha) - a^2\alpha(y + \lambda\beta)](1 + \lambda) = 0.$

Développons cette équation en ordonnant son premier membre par rapport à λ; le coefficient de λ^2 est nul et l'on trouve

$$c^2xy + b^2\beta x - a^2\alpha y + \lambda[a^2\beta x - b^2\alpha y - c^2\alpha\beta] = 0$$

ou, en remplaçant λ par sa valeur,

$$\left(\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} - 1\right)[c^2xy + b^2\beta x - a^2\alpha y] - 2\left(\frac{\alpha x}{a^2} + \frac{\beta y}{b^2} - 1\right)[a^2\beta x - b^2\alpha y - c^2\alpha\beta] = 0.$$

Cette équation représente une conique passant par les quatre points A', B', C', D'. Pour que ces quatre points soient sur un cercle, il faut et il suffit que les axes de cette conique soient parallèles à ceux de l'ellipse donnée et par suite on aura le lieu du point P en écrivant que le coefficient du terme en xy est nul, ce qui donne

$$c^2\left(\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} - 1\right) - 2\frac{a^2}{b^2}\beta^2 + 2\frac{b^2}{a^2}\alpha^2 = 0,$$

ou, en remplaçant α par x, β par y, et simplifiant,

$$(a^2 + b^2)\left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right) - c^2 = 0.$$

Cette equation représente une hyperbole facile à construire. Les asymptotes sont les diagonales du rectangle construit sur les axes de l'ellipse donnée.

L. Marix, lycée Saint-Louis. Solente, lycée Louis-le-Grand.

Autres solutions : M. le capitaine E. N. Barisien ; J. Hais, lycée Hoche.

---

143. — *On donne une parabole et par un point* P *de son plan on mène les trois normales à la parabole. On considère le cercle* C *qui passe par les pieds de ces normales. On prolonge les trois normales jusqu'aux points où elles rencontrent de nouveau la parabole. Soit* C' *le cercle qui passe par les trois points ainsi obtenus. Quelle courbe doit décrire le point* P :

1° pour que les cercles C *et* C' *soient orthogonaux;*

2° pour que les cercles C *et* C' *soient tangents?*

On sait que l'équation du cercle C est

$$x^2 + y^2 - (\alpha + p)x - \frac{\beta y}{2} = 0, \qquad \text{(C)}$$

α et β désignant les coordonnées du point P, et l'équation de la parabole étant

$$y^2 - 2px = 0.$$

Si $(x_1 y_1)$ est le pied d'une des normales et (X_1, Y_1) le second point de rencontre de la même normale avec la parabole, on a

$$Y_1 = -y_1 - \frac{2p^2}{y_1}. \tag{1}$$

Mais y_1 est racine de l'équation aux ordonnées des pieds des normales, laquelle est

$$y_1^3 - 2p(\alpha - p)y_1 - 2p^2\beta = 0. \tag{2}$$

Pour former l'équation en Y_1, il suffit d'éliminer y_1 entre (1) et (2). Or (1) et (2) peuvent s'écrire (en supprimant les indices)

$$y^2 + Yy + 2p^2 = 0, \tag{1'}$$

$$y^3 - 2p(\alpha - p)y - 2p^2\beta = 0. \tag{2'}$$

Ce système se ramène aux deux équations du second degré en y

$$y^2 + Yy + 2p^2 = 0, \tag{1''}$$

$$Yy^2 + 2p\alpha y + 2p^2\beta = 0.$$

L'élimination de y entre ces deux équations donne immédiatement

$$2p^2(Y - \beta)^2 = (Y^2 - 2p\alpha)(2p\alpha - \beta Y)$$

ou, en développant,

$$\beta Y^3 - 2p(\alpha - p)Y^2 - 2p\beta(\alpha + 2p)Y + 2p^2(2\alpha^2 + \beta^2) = 0. \tag{4}$$

Telle est l'équation qui donne les ordonnées des points A', B', C'.

Désignons par $$X^2 + Y^2 + 2MX + 2NY + Q = 0 \tag{C'}$$

l'équation du cercle (C'). En éliminant X entre cette équation et $Y^2 = 2pX$, nous avons l'équation aux ordonnés des points d'intersection du cercle avec la parabole, c'est-à-dire

$$\frac{Y^4}{4p^2} + \frac{Y^2}{p}(M + p) + 2NY + Q = 0. \tag{5}$$

Or, trois des racines de cette équation doivent être racines de (4). Il faut donc identifier (5) avec l'équation

$$[\beta Y^3 - 2p(\alpha - p)Y^2 - 2p\beta(\alpha + 2p)Y + 2p^2(2\alpha^2 + \beta^2)](AY + B) = 0,$$

ce qui donne les relations

$$\frac{A}{\beta} = \frac{B}{2p(\alpha - p)},$$

$$2pA\beta = \frac{-p[B(\alpha - p) + \beta(\alpha + 2p)A]}{M + p} = \frac{p(2\alpha^2 + \beta^2)A - \beta(\alpha + 2p)B}{2N} = \frac{pB(2\alpha^2 + \beta^2)}{Q}.$$

D'où l'on déduit, en remplaçant A et B par les quantités proportionnelles β et $2p(\alpha - p)$.

$$M = -\frac{[\beta^2(\alpha + 4p) + 2p(\alpha - p)^2]}{2\beta^2}. \tag{6}$$

$$N = \frac{\beta^2 - 2p\alpha + 4p^2}{4\beta}, \tag{7}$$

$$Q = \frac{p(\alpha - p)(2\alpha^2 + \beta^2)}{\beta^2}. \tag{8}$$

On a ainsi l'équation de (C').

1° Si les cercles C et C' sont orthogonaux, il faut que

$$D^2 = R^2 + R'^2, \tag{9}$$

D étant la distance des centres, R et R' les rayons de C et C'. Or

$$R^2 = \frac{(\alpha + p)^2}{4} + \frac{\beta^2}{16},$$

$$R'^2 = M^2 + N^2 - Q,$$

$$D^2 = \left[\frac{\alpha + p}{2} + M\right]^2 + \left[\frac{\beta}{4} + N\right]^2.$$

La relation (9) devient donc

$$M(\alpha + p) + \frac{N\beta}{2} + Q = 0 .$$

Si on porte dans cette relation les valeurs (6), (7) et (8), on trouve pour lieu des points P une *quartique*.

2° Si les cercles C et C′ sont tangents, on doit avoir

$$R \pm R' = D ,$$

c'est-à-dire

$$(R^2 + R'^2 - D^2)^2 = 4R^2R'^2 ,$$

ou

$$\left[Q + M(\alpha + p) + \frac{N\beta}{2}\right]^2 = \left[(\alpha + p)^2 + \frac{\beta^2}{4}\right](M^2 + N^2 - Q) .$$

On trouve ainsi une courbe du huitième degré.

E. N. Barisien.

QUESTIONS PROPOSÉES

153. — Trouver la limite de l'expression

$$\left[\left(1 + \frac{a-1}{m}\right)\left(1 + 2\frac{a-1}{m}\right)\cdots\left(1 + m\frac{a-1}{m}\right)\right]^{\frac{a-1}{m}}$$

quand l'entier positif m croît indéfiniment, a désignant un nombre positif.

Cas particulier : $a = e$.

(A. Cadenat, professeur au collège de Saint-Claude.)

154. — Trouver l'enveloppe des axes des coniques tangentes à deux droites données en des points donnés. Étant donnée une tangente à l'enveloppe, reconnaître le genre de la conique dont elle est un axe.

(P.)

155. — On considère toutes les coniques C tangentes à une droite en un point donné et ayant pour foyer un point donné.

1° Par un point du plan, il passe deux de ces coniques; reconnaître leur genre.

2° Lieu des sommets de l'axe focal. Étant donné un point du lieu, reconnaître le genre de la conique dont il est un sommet.

(P.)

156. — Par un point A pris sur un paraboloïde hyperbolique, on mène une perpendiculaire à chacune des génératrices d'un même système; prouver que le lieu de ces perpendiculaires est un cône du second degré. Trouver les plans cycliques de ce cône. Lieu des pieds des perpendiculaires.

157. — Trouver la condition pour que les normales à l'ellipsoïde $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$ aux points d'intersection par le plan $u\frac{x}{a} + v\frac{y}{b} + w\frac{z}{c} - 1 = 0$ soient rencontrées par une même droite. Montrer que si la relation trouvée est remplie, les normales aux points d'intersection de l'ellipsoïde donné par le plan $\frac{x}{ua} + \frac{y}{vb} + \frac{z}{wc} - 1 = 0$ rencontrent la même droite.

Le Rédacteur-Gérant : H. VUIBERT.

PARIS — IMP. CHAIX. — 9958-4-92.

2e Année. N° 9. Juin 1892.

REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

ALGÈBRE

Résoudre le système d'équations

$$\left.\begin{aligned} y^2 + z^2 + 2myz &= a^2 \\ z^2 + x^2 + 2nzx &= b^2 \\ x^2 + y^2 + 2pxy &= c^2 \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

En général, la solution de ce système dépend d'équations du huitième degré réductibles au quatrième. M. Desboves a indiqué (*Exercices d'algèbre*, pages 354 et suivantes) des cas particuliers où les valeurs de x, y, z peuvent se calculer. Je me propose d'indiquer d'autres cas où la solution peut se ramener à celles d'équations de degré inférieur à 4.

Multipliant les équations proposées par les fractions indéterminées

$$\mu = \frac{N^2 + P^2 - M^2}{2NPM}, \qquad \nu = \frac{P^2 + M^2 - N^2}{2PMN}, \qquad \lambda = \frac{M^2 + N^2 - P^2}{2MNP},$$

et ajoutant, on a

$$\mu a^2 + \nu b^2 + \lambda c^2 = \frac{1}{MNP}(Mx + Ny + Pz)^2 + \Sigma\, 2\left(m\mu - \frac{1}{M}\right) yz. \qquad (2)$$

Premier cas particulier. — Posons

$$m\mu - \frac{1}{M} = 0, \qquad n\nu - \frac{1}{N} = 0, \qquad p\lambda - \frac{1}{P} = 0.$$

Ces équations ont une infinité de solutions quand

$$\frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{p^2} + \frac{2}{mnp} = 1;$$

il y a alors trois angles positifs A, B, C inférieurs à 2π et ayant pour somme $(2k+1)\pi$ tels que

$$m = \frac{1}{\cos A}, \qquad n = \frac{1}{\cos B}, \qquad p = \frac{1}{\cos C},$$

d'où

$$\frac{M}{\sin A} = \frac{N}{\sin B} = \frac{P}{\sin C} \qquad \text{et} \qquad \frac{\mu}{\operatorname{cotg} A} = \frac{\nu}{\operatorname{cotg} B} = \frac{\lambda}{\operatorname{cotg} C};$$

l'équation (2) devient alors

$$a^2 \operatorname{cotg} A + b^2 \operatorname{cotg} B + c^2 \operatorname{cotg} C = \frac{1}{\sin A \sin B \sin C}(x \sin A + y \sin B + z \sin C)^2.$$

et se ramène à la forme

$$x \sin A + y \sin B + z \sin C = \pm H.$$

Éliminons z entre cette équation et l'une des équations (1); nous serons ramenés à un système d'équations entre x et y de la forme

$$x^2 + y^2 + 2pxy = c^2,$$

$$\alpha x^2 + \beta y^2 + 2\gamma xy + 2\delta x + 2\varepsilon y + \varphi = 0,$$

qui peut se résoudre par une équation du troisième degré.

Les équations (1) sont celles de trois cylindres parallèles aux axes de coordonnées. Leurs huit points communs se trouvent quatre par quatre dans deux plans parallèles et équidistants de l'origine. La solution géométrique du problème est ramenée à l'intersection de deux coniques. Si $H = 0$, les deux plans se confondent, mais comme alors $\delta = \varepsilon = 0$, les deux coniques sont concentriques et l'équation du troisième degré se réduit au deuxième.

Deuxième cas particulier. — Les équations (1) donnent par transformation et addition

$$y - z + z - x + x - y = 0 = \pm\sqrt{a^2 - 2(m+1)yz} \pm \sqrt{b^2 - 2(n+1)zx} \pm \sqrt{c^2 - 2(p+1)xy}$$

ou, en faisant disparaître les radicaux, et en posant $a + b + c = 2s$,

$$\sum (1 - m^2)y^2z^2 + 2xyz \sum (m + np)x = 4s(s-a)(s-b)(s-c) \tag{3}$$

ou
$$(\alpha yz + \beta zx + \gamma xy)^2 + 2xyz(M'x + N'y + P'z) = 4s(s-a)(s-b)(s-c), \tag{3'}$$

$1 - m^2$, $1 - n^2$, $1 - p^2$ étant admis positifs.

Posons
$$\frac{m\mu - \frac{1}{M}}{\alpha} = \frac{n\nu - \frac{1}{N}}{\beta} = \frac{p\lambda - \frac{1}{P}}{\gamma} \quad \text{et} \quad \frac{M}{M'} = \frac{N}{N'} = \frac{P}{P'}.$$

Ces équations sont satisfaites quand

$$m^2 + n^2 + p^2 + 2mnp = 1.$$

Il y a alors trois angles positifs A, B, C, inférieurs à 2π, et ayant pour somme $(2k+1)\pi$, tels que
$$m = \cos A, \quad n = \cos B, \quad p = \cos C,$$
d'où
$$\alpha = \sin A, \quad \beta = \sin B, \quad \gamma = \sin C,$$
$$\frac{M}{\sin A} = \frac{N}{\sin B} = \frac{P}{\sin C}, \qquad \frac{\mu}{\operatorname{cotg} A} = \frac{\nu}{\operatorname{cotg} B} = \frac{\lambda}{\operatorname{cotg} C}.$$

Les équations (2) et (3) deviennent alors, en posant

$$\left.\begin{aligned} x \sin A + y \sin B + z \sin C &= u \\ yz \sin A + zx \sin B + xy \sin C &= v \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

$$a^2 \operatorname{cotg} A + b^2 \operatorname{cotg} B + c^2 \operatorname{cotg} C = \frac{u^2}{\sin A \sin B \sin C} - 2v,$$

$$v^2 = 4s(s-a)(s-b)(s-c).$$

De là nous tirerons les valeurs de u et de v.

Discussion. v ne peut être réel que si les longueurs a, b, c sont capables de former un triangle T. Sa surface étant S, on aura

$$v = \pm 2S;$$

chaque valeur de v donne une valeur correspondante de u^2

$$u^2 = \sin A \sin B \sin C[a^2 \operatorname{cotg} A + b^2 \operatorname{cotg} B + c^2 \operatorname{cotg} C - 2v].$$

Soient $2A_1$ et B_1 la somme et le produit de ces deux valeurs de u^2; on trouve

$$B_1 = \sin^2 A \sin^2 B \sin^2 C \left[\left(\frac{a^2}{\sin A} - \frac{b^2 \cos C}{\sin B} - \frac{c^2 \cos B}{\sin C}\right)^2 + \left(\frac{b^2 \sin C}{\sin B} - \frac{c^2 \sin B}{\sin C}\right)^2\right],$$

$$A_1 = \sin^2 B \sin^2 C[b^2 \operatorname{cotg}^2 B + \operatorname{cotg} B(b^2 + c^2 - a^2)\operatorname{cotg} C + c^2 \operatorname{cotg}^2 C - a^2],$$

et on conclut que A_1 et B_1 étant positifs, les valeurs de u sont aussi réelles.

Calcul de x, y, z. z étant éliminé entre les équations (4), on a

$$a^2 \sin B \sin C + v \sin A = u(z \sin B + y \sin C),$$

et aussi

$$b^2 \sin C \sin A + v \sin B = u(x \sin C + z \sin A),$$

$$c^2 \sin A \sin B + v \sin C = u(y \sin A + x \sin B);$$

z étant éliminé de nouveau entre les deux premières de ces équations, on a

$$(b^2 - a^2) \sin A \sin B \sin C + v(\sin^2 B - \sin^2 A) = u \sin C(x \sin B - y \sin A);$$

on a donc deux équations du premier degré pour tirer x et y, et on a

$$\left.\begin{aligned} 2ux &= (b^2 + c^2 - a^2)\sin A + 2v \cos A \\ 2uy &= (c^2 + a^2 - b^2)\sin B + 2v \cos B \\ 2uz &= (a^2 + b^2 - c^2)\sin C + 2v \cos C \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

puis

Chaque valeur de v pouvant être tour à tour associée aux deux valeurs correspondantes de u, on trouve ainsi quatre systèmes de valeurs réelles pour x, y, z. Ces valeurs peuvent se transformer d'une façon remarquable. Soient A′, B′, C′ les angles du triangle T qui a pour côtés a, b, c:

$$b^2 + c^2 - a^2 = 2bc \cos A' \qquad \text{et} \qquad v = \pm bc \sin A';$$

donc

$$ux = bc \sin(A \pm A'),$$

et par suite,

$$x = \frac{bc}{u} \sin (A \pm A'), \qquad y = \frac{ca}{u} \sin (B \pm B'), \qquad z = \frac{ab}{u} \sin (C \pm C') \qquad (6)$$

Construction des valeurs absolues de x, y, z. — Dans $A + B + C = (2k + 1)\pi$, on peut prendre $k = 0$ ou 1, mais les valeurs absolues de x, y, z sont les mêmes dans la seconde hypothèse que dans la première; en effet, soit $A = \pi + A''$; comme dans ce cas

$$\sin A \sin (A \pm A') = \sin A'' \sin (A'' \pm A'),$$

x n'a fait que changer de signe. Nous supposerons par conséquent $A + B + C = \pi$.

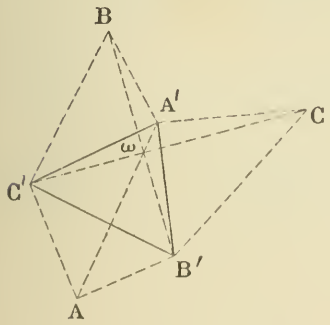


Fig. 1.

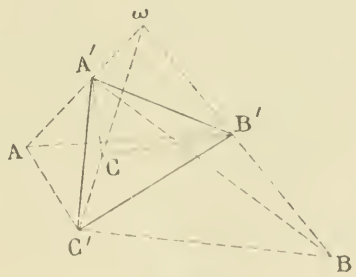


Fig. 2.

Sur les côtés du triangle A′B′C′ construisons des triangles AB′C′, BC′A′, CB′A′ semblables entre eux et tels que les angles $\widehat{B'AC'}$, $\widehat{C'BA'}$, $\widehat{A'CB'}$ soient respectivement égaux à $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$. La figure peut être faite de deux façons suivant que les nouveaux triangles sont tournés vers l'extérieur ou vers l'intérieur de T; mais dans les deux cas *(fig. 1 et 2)* les lignes AA′, BB′, CC′ convergent au même point ω qui est aussi le point commun à trois segments capables de $\pi - A$, $\pi - B$, $\pi - C$ ou de A, B, $\pi - C$ décrits sur a, b, c.

Les similitudes de triangles de la figure (1) donnent

$$\frac{\omega A'}{bc \sin (A + A')} = \frac{\omega B'}{ac \sin (B + B')} = \frac{\omega C'}{ab \sin (C + C')},$$

puis

$$AA' \sin A = BB' \sin B = CC' \sin C = \omega A' \sin A + \omega B' \sin B + \omega C' \sin C;$$

appelons u la valeur commune de cette expression; les rapports précédents ont pour valeur commune

$$\frac{u}{\Sigma bc \sin (A + A') \sin A};$$

mais $$C \sin(A + A') = BB' \sin \widehat{A'C'\omega} = u \frac{\sin \widehat{A'C'\omega}}{\sin B} = u \frac{\omega A'}{b};$$

par conséquent la valeur commune des rapports est $\frac{1}{u}$.

Enfin dans le triangle $AA'B'$ on a

$$\overline{AA'}^2 = \overline{A'B'}^2 + \overline{AB'}^2 - 2AB'.A'B' \cos(B+B') = \frac{\sin A \sin B \sin C}{\sin^2 A}\left[a^2 \operatorname{cotg} A + b^2 \operatorname{cotg} B + c^2 \operatorname{cotg} C + 4S\right] = \frac{u^2}{\sin^2 A}.$$

Les valeurs de u, x, y, z ainsi construites sont donc conformes à celles du calcul. Le même rapprochement doit être fait pour la figure (2).

Nous remarquerons que si l'on pose

$$\frac{u}{\sin A \sin B \sin C} = 2R,$$

R est le rayon du cercle circonscrit au triangle maximum, ayant pour angles A, B, C et circonscrit lui-même à $A'B'C'$; le raisonnement fait voir aisément que les côtés de ce triangle maximum sont perpendiculaires à ωA, ωB, ωC; et ce résultat est confirmé par le calcul.

Théorème de Steiner généralisé. — Les calculs faits plus haut donnent la preuve de ce théorème.

Si d'un point M *pris dans le plan d'un triangle* ABC *on mène des obliques inclinées de l'angle* θ *et dans le même sens, limitées en* A', B', C' *aux côtés de ce triangle, l'aire du triangle* A'B'C' *est proportionnelle à la puissance du point* M *par rapport au cercle circonscrit à* ABC.

Soit R le rayon du cercle, S l'aire du triangle $A'B'C'$; on a d'après ce qui précède

$$R^2 = \frac{\sin^2 \theta}{4 \sin A \sin B \sin C}[\Sigma \overline{B'C'}^2 \operatorname{cotg} A \pm 4S].$$

Soit O le centre du cercle

$$\overline{B'C'}^2 \operatorname{cotg} A = \frac{\overline{MA}^2 \sin 2A}{2 \sin^2 \theta} = \frac{(R^2 + \overline{OM}^2) \sin 2A}{2 \sin^2 \theta} - \frac{2R.OM}{2 \sin^2 \theta} \sin 2A \cos \widehat{AOM}.$$

Comme $\Sigma \sin 2A = 4 \sin A \sin B \sin C$ et $\Sigma \sin 2A \cos \widehat{AOM} = 0$, on en déduit l'égalité

$$S = \pm \frac{\sin A \sin B \sin C}{2 \sin^2 \theta}(R^2 - \overline{OM}^2),$$

qui prouve le théorème énoncé. Si S = constante, le point M décrit un cercle concentrique au cercle O. Si $S = 0$, $OM = R$, et on a le théorème de Simson.

Troisième cas particulier. — Supposons $m = n = p$. Nous prendrons pour inconnues auxiliaires,

$$x + y + z = u, \qquad yz + zx + xy = v.$$

Posons alors $a^2 + b^2 + c^2 = 2d^2$; l'addition des équations (1) donne

$$u^2 + (m - 2)v = d^2, \tag{7}$$

et ces mêmes équations peuvent s'écrire

$$\left.\begin{aligned} u(x + y) + (2m - 1)xy &= c^2 + v \\ u(z + x) + (2m - 1)zx &= b^2 + v \\ u(y + z) + (2m - 1)yz &= a^2 + v. \end{aligned}\right\} \tag{1'}$$

$2m - 1$ sera supposé différent de zéro. Éliminons successivement x, y, z entre elles, puis posons, dans le cas de $m + 1 \neq 0$,

$$d^2 + (m + 1)v = (2m - 1)t. \tag{7'}$$

Les équations (1') donneront, en fonction de u, v, t, et d'une nouvelle auxiliaire w qui sera déterminée plus loin, les valeurs

$$wu^2 = (2m - 1)(a^2 + t)x + (a^2 + v)u = (2m - 1)(b^2 + t)y + (b^2 + v)u = (2m - 1)(c^2 + t)z + (c^2 + v)u. \tag{8}$$

Tirons-en x, y, z et substituons ces valeurs dans l'une des équations (1') ainsi que dans la somme $x + y + z = u$; nous en déduirons

$$\left.\begin{aligned} &\frac{2m-1}{u}w^2 + 2w + \frac{u^6 - (2m-1)^3(a^2+t)(b^2+t)(c^2+t)}{(2m-1)u^5} = 0 \\ &\left(uw + \frac{u^2}{2m-1}\right)\sum\frac{1}{a^2+t} = 2(m+1); \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

enfin, comme d'après (7), (7') $u^2 = \dfrac{2m-1}{m+1}\,[d^2 - (m-2)t]$,

si l'on élimine u et w entre ces trois équations, on obtient finalement une équation en t

$$F(t) = [(a^2+t)(b^2+t)+(a^2+t)(c^2+t)+(b^2+t)(c^2+t)]^2 + 4(m+1)(a^2+t)(b^2+t)(c^2+t)[(m-2)t-d^2] = 0. \quad (10)$$

On aura donc successivement à résoudre les équations (10), (7'), (9), (7), (8), qui feront connaître, dans le même ordre, les valeurs de t, u^2, w, v et enfin x, y, z.

Discussion. — Soit $a^2 > b^2 > c^2$. Le premier terme de $F(t)$ a deux racines réelles t_1, t_2, négatives

$$-a^2 < t_1 < -b_2 < t_2 < -c^2.$$

Soit $t_3 = \dfrac{d^2}{m-2}$. Comparons t_3 à t_1 et t_2.

Si $t_3 < t_1$, ce qui exige $m - 2 < 0$, la suite

	$-\infty$	t_3	t_1	$-b^2$	t_2	$-c^2$	$+\infty$
donne les signes de $F(t)$	$+$	$+$	$-(m+1)$	$+$	$+(m+1)$	$+$	$+$

Il y a alors une racine réelle de $F(t) = 0$ comprise entre t_1 et t_2; il y en a aussi une deuxième comprise entre t_1 et t_3 ou supérieure à t_2 suivant que $m \gtrless -1$.

Si $t_3 > t_2$ les conclusions sont analogues.

Si $t_1 < t_3 < t_2$, on a pour la suite

	$-\infty$	$-a^2$	t_1	t_3	t_2	$-c^2$	$+\infty$
les signes correspondants	$+$	$+$	$(m+1)$	$+$	$(m+1)$	$+$	$+$

Il y a incertitude quand $m + 1$ est > 0, mais si $m + 1$ est négatif les quatre racines de $F(t) = 0$ sont réelles.

Si $t_3 = t_1$ ou t_2, $F(t)$ est divisible par $t - t_3$ et a par conséquent deux racines réelles au moins.

Dans le cas où $a^2 = b^2$ l'équation $F(t) = 0$ admet $t = -a^2$ pour racine double. On voit aisément qu'elle répond à $x = y$. Cette racine supprimée, il reste une équation du second degré en t qui donnera d'autres solutions où x diffère de y.

Les valeurs réelles de t ayant été calculées, on en déduira des valeurs réelles correspondantes pour v et u^2. Or

$$u^2 = \frac{(2m-1)(m-2)}{m+1}(t_3 - t);$$

u sera donc réel si $t < t_3$ quand $m > 2$ ou $-1 < m < \frac{1}{2}$;

si $t > t_3$ quand $m < -1$ ou $\frac{1}{2} < m < 2$;

dans ces mêmes conditions, w, x, y, z auront des valeurs réelles, chaque valeur différente de u donnant un système de solutions.

P. Barbarin,
professeur au lycée de Bordeaux.

GEOMÉTRIE ANALYTIQUE

133. — *Étant donné un quadrilatère circonscriptible à un cercle, on déforme ce quadrilatère, ses côtés conservant des longueurs invariables et deux sommets restant fixes; lieu du centre du cercle inscrit.*

Il est clair que les deux sommets fixes sont consécutifs, sans quoi le quadrilatère ne pourrait être déformé, il n'y aurait pas de lieu.

Soient a, b, c, d les côtés; ils satisfont à la relation

$$a + c = b + d.$$

Prenons le côté a pour axe de x et une perpendiculaire à l'une de ses extrémités pour axe des y.

Les normales menées du centre du cercle inscrit aux quatre côtés sont égales entre elles et à l'ordonnée y d'un point du lieu. Ces droites et celles qui joignent les sommets au centre forment autour de ce point huit angles égaux deux à deux et dont la demi-somme est π.

Les tangentes de quatre de ces angles sont

$$\frac{x}{y}, \quad \frac{a-x}{y}, \quad \frac{b-a+x}{y}, \quad \frac{d-x}{y},$$

x et y désignant les coordonnées d'un point du lieu.

Pour écrire que la somme de ces quatre angles égale π, j'écris que la tangente de la somme est nulle :

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta + \gamma + \delta) = 0 \quad \text{ou} \quad \operatorname{tg}(\alpha + \beta) + \operatorname{tg}(\gamma + \delta) = 0.$$

On obtient

$$\frac{ay}{y^2 + x^2 - ax} + \frac{(b - a + d)y}{y^2 + (x + b - a)(x - d)} = 0.$$

Le lieu a donc pour équation, en supprimant le facteur y,

$$(b + d)(x^2 + y^2) - 2adx + ad(a - b) = 0.$$

Le lieu est un cercle qui a son centre sur Ox.

AUDIBERT (Marseille).

(Autres solutions de MM. A. DE BOISPLEURY, collège Stanislas; DUPORTAL; L. PERRÉE, lycée Condorcet.)

---

138. — *On donne la courbe du troisième degré définie par l'équation*

$$x^3 = 3ay^2$$

(axes rectangulaires).

On peut lui mener d'un point P *trois tangentes. On considère le cercle* C *passant par les trois points de contact. Trouver le lieu que doit décrire le point* P *:*

1° Pour que le rayon du cercle C *soit constant;*

2° Pour que le centre du cercle C *soit sur la cubique;*

3° Pour que le cercle C *soit tangent à la cubique.*

L'équation de la polaire du point P (α, β) par rapport à la courbe donnée est

$$\alpha x^2 - 2\alpha\beta y - ay^2 = 0;$$

par suite, l'équation aux coefficients angulaires des droites joignant l'origine aux points de rencontre de cette polaire avec la courbe est

$$3\alpha t^3 - 3\alpha t + 2\beta = 0. \qquad (1)$$

Un cercle quelconque C représenté par l'équation

$$x^2 + y^2 + 2mx + 2ny + p = 0$$

coupe la courbe donnée en six points. L'équation aux coefficients angulaires des droites joignant l'origine à ces points est

$$9a^2t^6 + 9a^2t^4 + 6nat^3 + 6mat^2 + p = 0. \qquad (2)$$

Le cercle considéré répondra à la question si le premier membre de l'équation (2) est divisible par le premier membre de l'équation (1). Pour qu'il en soit ainsi on doit poser

$$m = -\frac{3\alpha(a+\alpha)}{2a}, \qquad n = \frac{\beta(a+2\alpha)}{\alpha}, \qquad p = \frac{4\beta^2(a+\alpha)}{\alpha}.$$

Le quotient est alors $\qquad 3at^3 + 3(a+\alpha)t + 2(n-\beta).$

1° Pour que le rayon du cercle C soit égal à R, on doit avoir

$$m^2 + n^2 - p = R^2,$$

c'est-à-dire

$$\frac{9\alpha^2(a+\alpha)^2}{4a^2} + \frac{\beta^2(a+2\alpha)^2}{\alpha^2} - \frac{4\beta^2(a+\alpha)}{\alpha} = R^2$$

ou, en remplaçant α par x et β par y,

$$y^2 = \frac{x^2[4a^2R^2 - 9x^2(a+x)^2]}{4a^4}. \qquad (3)$$

La courbe représentée par cette équation est symétrique par rapport à l'axe des x, et la forme de l'équation montre que cette courbe est fermée. On peut écrire

$$y^2 = \frac{x^2[2aR - 3x(a+x)][2aR + 3x(a+x)]}{4a^4}.$$

Comme on peut évidemment supposer $a > 0$, on voit que le second trinome $3x^2 + 3ax + 2aR$ ne peut s'annuler que si l'on a $3a - 8R > 0$; donc, il y a trois cas à distinguer :

I. — $R < \frac{3}{8}a$. Si l'on désigne par x_1, x_2 les racines de l'équation

$$3x^2 + 3ax - 2aR = 0$$

et par x_3, x_4, celles de l'équation

$$3x^2 + 3ax + 2aR = 0,$$

on reconnaît que ces racines sont ainsi rangées :

$$x_1 < x_3 < x_4 < x_2,$$

puisque si l'on suppose $3x^2 + 3ax = -2aR$, le polynome $3x^2 + 3ax - 2aR$ se réduit à $-4aR$; d'ailleurs la racine x_2 est la seule positive.

Comme on peut écrire

$$y^2 = \frac{-9x^2(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}{4a^4},$$

on voit que si l'on trace les parallèles à Oy ayant respectivement pour abcisses les racines x_1, x_3, x_4, x_2, la courbe est tout entière entre la première et la seconde et entre la troisième et la quatrième. Enfin elle est tout entière dans la région comprise entre les tangentes à l'origine où se trouve l'axe des x. Ces tangentes, définies par l'équation

$$a^2y^2 - R^2x^2 = 0,$$

touchent encore la courbe aux points ayant pour coordonnées $x = -a$, $y = +R$.

En remarquant que $-a$ est compris entre x_1 et x_3, on trouve pour la courbe la forme représentée par la *figure 1*.

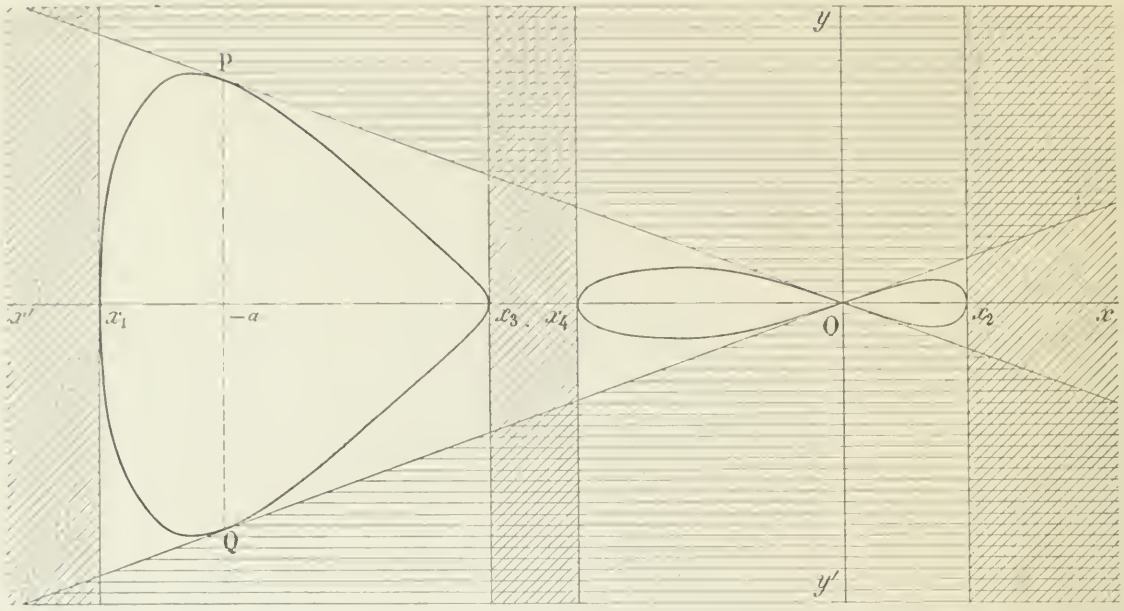


Fig. 1.

II. — $R = \frac{3}{8}a$. Les deux boucles de la courbe se rejoignent et se raccordent au point A d'abscisse $-\frac{a}{2}$. On obtient alors la *figure 2*.

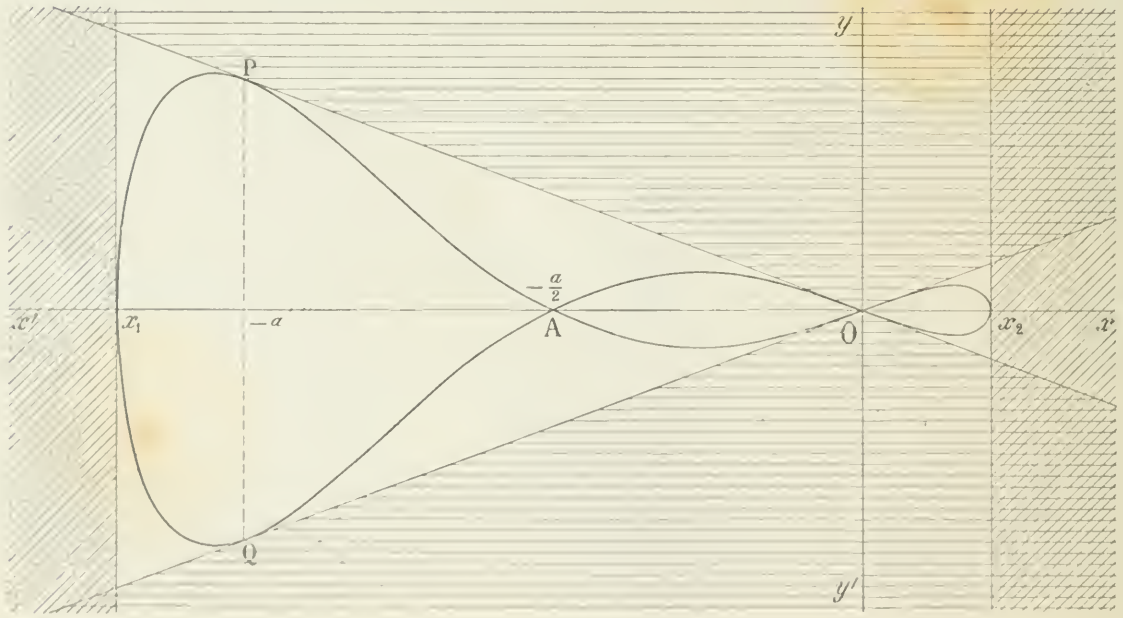


Fig. 2.

III. — $R > \frac{3}{8}a$. La courbe rencontre l'axe des x en quatre points, dont deux sont confondus avec l'origine. La forme de la courbe est celle de la *figure 3*.

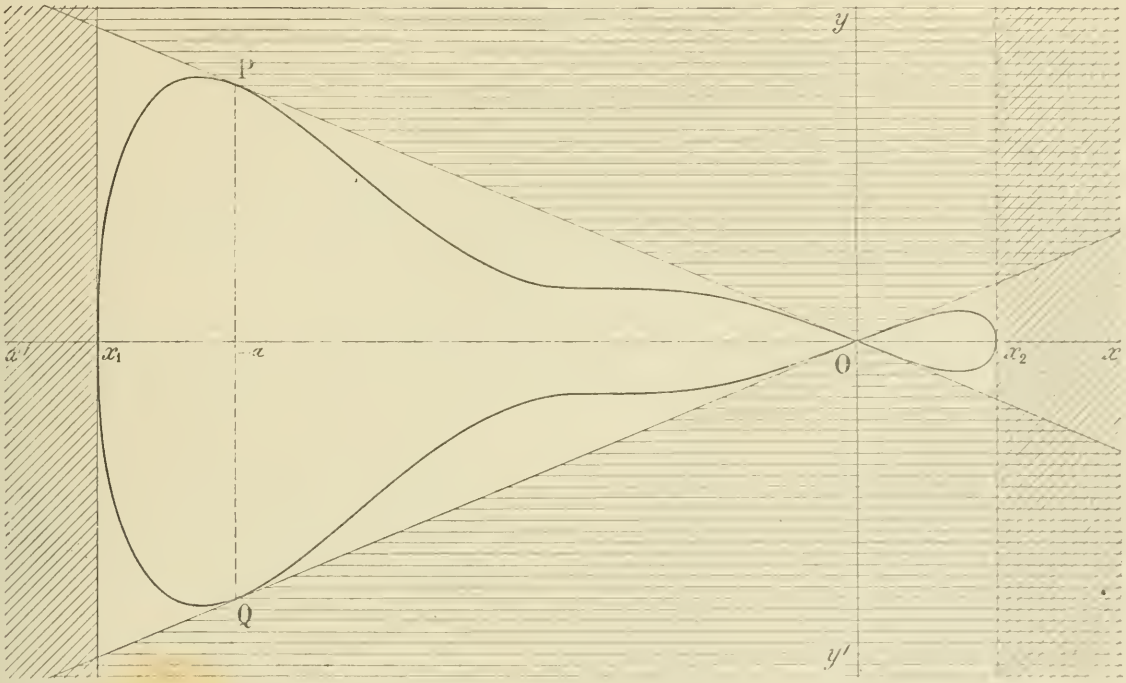


Fig. 3.

2° Nous avons trouvé pour les coordonnées du centre du cercle

$$-m = \frac{3\alpha(a+\alpha)}{2a}, \qquad -n = \frac{-\beta(a+2\alpha)}{\alpha};$$

pour que ces coordonnées vérifient l'équation de la cubique donnée, il faut que le point P soit sur la courbe représentée par l'équation

$$\frac{27x^3(a+x)^3}{8a^3} = 3ay^2\frac{(a+2x)^2}{x^2}$$

ou

$$y^2 = \frac{9x^5(a+x)^3}{8a^4(a+2x)^2}.$$

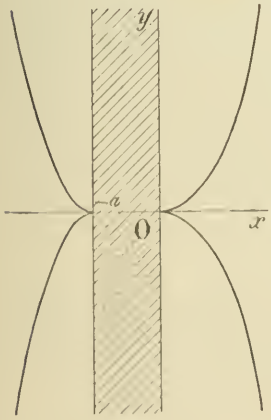


Fig 4.

Cette courbe est symétrique par rapport à l'axe des x; elle a des branches paraboliques. L'origine et le point dont les coordonnées sont $-a$ et 0 sont des points de rebroussement; il n'y a aucun point entre la parallèle à Oy ayant pour abscisse $-a$ et l'axe des y. La droite représentée par l'équation $x = -\frac{a}{2}$ est asymptote à des branches imaginaires. La forme de la courbe est représentée sur la *figure 4*.

3° Le cercle sera tangent à la courbe donnée si l'équation (2) a une racine double. Il en sera ainsi dans trois cas différents :

a) Si l'équation (1) a une racine double, ce qui exige que $\alpha^3 = 3a\beta^2$; on retrouve la courbe proposée, comme on devait s'y attendre.

b) Si l'équation

$$3at^3 + 3(a + \alpha)t + 2(n - \beta) = 0 \qquad (4)$$

a une racine double, ce qui donne la condition

$$4\left(\frac{a + \alpha}{a}\right)^3 + 27\,\frac{4(n - \beta)^2}{9a^2} = 0$$

ou, en remplaçant n par sa valeur,

$$(a + \alpha)^3 + 3a\beta^2\,\frac{(a + \alpha)^2}{\alpha^2} = 0,$$

équation qui se décompose en

$$(a + \alpha)^2 = 0 \qquad \text{et} \qquad \alpha^3 + a(\alpha^2 + 3\beta^2) = 0.$$

Si l'on suppose $\alpha = -a$, on a $m = p = 0$; le cercle rencontre la cubique à l'origine; on obtient donc comme nouvelle partie du lieu une cubique ayant pour équation

$$x^3 + a(x^2 + 3y^2) = 0.$$

L'origine est un point double isolé; la courbe est tout entière du côté des x négatifs par rapport à la parallèle à Oy ayant pour abscisse $-a$. On trouve, en écrivant,

$$y^2 = -\frac{x^2(a + x)}{3a},$$

la forme représentée par la *figure 5*.

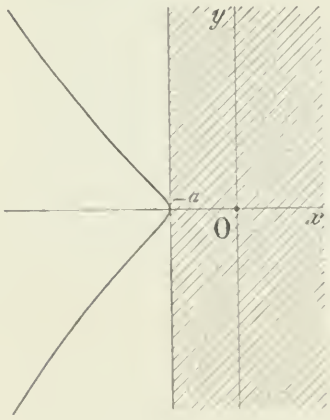


Fig. 5.

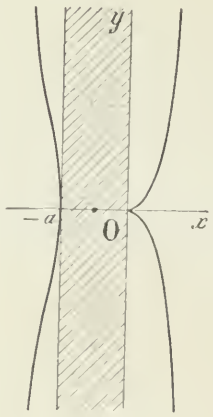


Fig. 6.

c) Enfin il peut arriver que les équations (1) et (4) aient une racine commune. En les retranchant membre à membre on trouve, après avoir remplacé n par sa valeur,

$$t = -\frac{2a\beta}{3\alpha(a + 2\alpha)};$$

en portant cette valeur dans l'équation (1) on obtient

$$-\frac{8a^4\beta^3}{9\alpha^3(a + 2\alpha)^3} + \frac{2a\beta}{a + 2\alpha} + 2\beta = 0$$

ou, en remplaçant α par x et β par y :

$$y = 0 \quad \text{et} \quad y^2 = \frac{9x^3(a + 2x)^2(a + x)}{2a^4}.$$

Laissant de côté la solution étrangère $y = 0$, il reste à construire une courbe représentée par l'équation précédente; cette construction ne présente aucune difficulté. Le point $\left(-\frac{a}{2}, 0\right)$ est un point isolé; la courbe a la forme représentée par la *figure 6*.

(E. Bourrienne, Rouen.)

Ont résolu la question : MM. E. N. Barisien; Gérard (lycée Saint-Louis); L. Perrée (lycée Condorcet); Vazou (Falaise).

---

144. — *On considère deux triangles inscrits à une même conique et on leur circonscrit deux coniques bitangentes : enveloppe de leur corde de contact.*

Si les deux coniques circonscrites sont homothétiques, leur corde commune passe par un point fixe.

Solution analytique. — Soient ABC, A'B'C' les deux triangles inscrits dans la conique donnée C. Prenons le triangle ABC pour triangle de référence, de sorte que l'équation de C soit

$$Ayz + Bzx + Cxy = 0. \qquad (1)$$

Soit
$$\alpha yz + \beta zx + \gamma xy = 0$$
l'équation d'une conique variable circonscrite au triangle ABC. L'équation générale des coniques bitangentes à cette conique étant de la forme
$$\alpha yz + \beta zx + \gamma xy = (ux + vy + wz)^2,$$
les équations
$$\left.\begin{aligned} \alpha y_1z_1 + \beta z_1x_1 + \gamma x_1y_1 &= (ux_1 + vy_1 + wz_1)^2 \\ \alpha y_2z_2 + \beta z_2x_2 + \gamma x_2y_2 &= (ux_2 + vy_2 + wz_2)^2 \\ \alpha y_3z_3 + \beta z_3x_3 + \gamma x_3y_3 &= (ux_3 + vy_3 + wz_3)^2 \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$
expriment que cette conique passe par les trois points $A'(x_1, y_1)$, $B'(x_2, y_2)$, $C'(x_3, y_3)$. Mais les points A', B', C' étant sur la conique C, on a
$$\begin{aligned} Ay_1z_1 + Bz_1x_1 + Cx_1y_1 &= 0\,, \\ Ay_2z_2 + Bz_2x_2 + Cx_2y_2 &= 0\,, \\ Ay_3z_3 + Bz_3x_3 + Cx_3y_3 &= 0\,, \end{aligned}$$
et comme A, B, C sont différents de zéro, le déterminant
$$\begin{vmatrix} y_1z_1 & z_1x_1 & x_1y_1 \\ y_2z_2 & z_2x_2 & x_2y_2 \\ y_3z_3 & z_3x_3 & x_3y_3 \end{vmatrix}$$
est nul. Ce déterminant étant celui des variables α, β, γ dans le système (2), pour que ce système soit possible, il faut que les déterminants caractéristiques soient nuls. Donc, si l'on pose
$$ux_1 + vy_1 + wz_1 = U, \qquad ux_2 + vy_2 + wz_2 = V, \qquad ux_3 + vy_3 + wz_3 = W,$$
on a
$$\begin{vmatrix} y_1z_1 & z_1x_1 & U^2 \\ y_2z_2 & z_2x_2 & V^2 \\ y_3z_3 & z_3x_3 & W^2 \end{vmatrix} = 0, \qquad (3)$$
en supposant $z_1z_2(y_1x_2 - x_1y_2) \neq 0$. Or cette condition est remplie, car trois quelconques des six sommets des deux triangles ne sont pas en ligne droite.

L'équation (3) est l'équation tangentielle d'une conique conjuguée à chacun des deux triangles donnés.

Supposons maintenant que les deux coniques circonscrites soient homothétiques; l'équation de la première étant toujours $\alpha yz + \beta zx + \gamma xy = 0$, celle de la seconde sera
$$\alpha yz + \beta zx + \gamma xy = (ax + by + cz)(ux + vy + wz),$$
$ax + by + cz = 0$ étant l'équation de la droite de l'infini et $ux + vy + wz = 0$ celle de la corde commune. En exprimant que cette conique passe par les points A', B', C', nous obtenons
$$\begin{aligned} \alpha y_1z_1 + \beta z_1x_1 + \gamma x_1y_1 &= HU, \\ \alpha y_2z_2 + \beta z_2x_2 + \gamma x_2y_2 &= KV, \\ \alpha y_3z_3 + \beta z_3x_3 + \gamma x_3y_3 &= LW, \end{aligned}$$
en posant $H = ax_1 + by_1 + cz_1$, $K = ax_2 + by_2 + cz_2$, $L = ax_3 + by_3 + cz_3$.

En raisonnant comme plus haut, on a
$$\begin{vmatrix} y_1z_1 & z_1x_1 & HU \\ y_2z_2 & z_2x_2 & KV \\ y_3z_3 & z_3x_3 & LW \end{vmatrix} = 0,$$
équation d'un point fixe.

(S. Lattès, lycée de Marseille.)

M. Vazou (collège de Falaise) a aussi envoyé une solution.

Solution géométrique. — Les deux triangles donnés sont conjugués à une même conique (C), à laquelle sont harmoniquement circonscrites les coniques considérées C_1 et C_2, et, par suite, comme on le voit aisément, toutes les coniques qui passent par les points communs à ces dernières. En particulier les cordes communes correspondantes des coniques C_1 et C_2 sont des droites conjuguées à la courbe C. Par suite, si une de ces cordes est double, ce qui a lieu pour deux coniques bitangentes, elle est à elle-même sa droite conjuguée, et est donc tangente à la conique C qui constitue l'enveloppe cherchée. Si les coniques C_1 et C_2 sont homothétiques, la corde commune à distance finie passe par le pôle de la droite de l'infini, c'est-à-dire le centre de la conique C.

(Ernest Duporcq, école Monge.)

Remarque. — Nous croyons utile de rappeler ici la définition des coniques harmoniquement circonscrites à une conique donnée.

Soient
$$f(x, y, z) \equiv ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dxz + 2eyz + hz^2 = 0,$$
$$f_1(x, y, z) \equiv a_1x^2 + 2b_1xy + c_1y^2 + 2d_1xz + 2e_1yz + h_1z^2 = 0$$
les équations de deux coniques. En appelant Δ et Δ_1 les discriminants de $f(x, y, z)$ et de $f_1(x, y, z)$, on sait que l'équation en λ relative au faisceau $f + \lambda f_1$ est
$$\Delta + \Theta\lambda + \Theta_1\lambda^2 + \Delta_1\lambda^3 = 0,$$
où l'on pose
$$\Theta = a_1A + 2b_1B + c_1C + 2d_1D + 2e_1E + 2h_1H,$$
A, B,... H étant les coefficients de l'équation tangentielle
$$Au^2 + 2Buv + Cv^2 + 2Duw + 2Evw + Hw^2 = 0$$
de la première conique. On sait (voir, par exemple, Picquet, *Géométrie analytique*, p. 509), que la condition $\Theta = 0$ exprime que la polaire d'un point quelconque de la conique f_1 par rapport à la conique f coupe les deux coniques en quatre points harmoniques; ce qui revient à dire qu'il existe une infinité de triangles inscrits dans f_1 et conjugués à f.

On dit alors que la seconde conique f_1 est harmoniquement circonscrite à la première f. Cela étant, si deux coniques f_1 et f_2 sont harmoniquement conjuguées par rapport à f, il en sera de même de toute conique passant par les points communs aux deux coniques f_1 et f_2; car si l'on a
$$a_1A + 2b_1B + \ldots = 0, \qquad a_2A + 2b_2B + \ldots = 0,$$
on a aussi
$$(a_1 + \lambda a_2)A + 2(b_1 + \lambda b_2)B + \ldots = 0.$$

Remarquons enfin que si une conique f_1 dégénère en un système de deux droites, la condition $\Theta = 0$ est précisément la condition pour que ces droites soient conjuguées par rapport à la conique f.

Ces considérations s'étendent aisément aux quadriques.

---

145. — *Le point de concours des hauteurs d'un tétraèdre à arêtes opposées orthogonales circonscrit à un paraboloïde, est dans le plan orthoptique de ce paraboloïde.*

On sait qu'une quadrique circonscrite à un tétraèdre conjugué à une autre quadrique est circonscrite à une infinité de tétraèdres analogues. Il en résulte que toutes les quadriques (Q), ainsi harmoniquement circonscrites à une quadrique fixe (S), qui passent par un point H, coupent le plan polaire de ce point relatif à (S) suivant des coniques harmoniquement circonscrites à la section de S par ce plan.

En particulier, toutes les quadriques circonscrites à un tétraèdre T à arêtes opposées orthogonales, et passant par le point de concours H de ses hauteurs, coupent le plan de l'infini suivant des

coniques harmoniquement circonscrites à l'ombilicale, car ces surfaces sont harmoniquement circonscrites à une sphère (S), de centre H, conjuguée au tétraèdre T.

En transformant ce résultat par polaires réciproques en prenant la sphère (S) pour surface de transformation, on trouve que tous les cônes de sommet H circonscrits aux paraboloïdes inscrits au tétraèdre T, sont harmoniquement circonscrits au cône isotrope de sommet H, c'est-à-dire qu'ils sont capables de trièdres trirectangles. — On en déduit l'énoncé proposé.

Remarque. — On peut énoncer ainsi le résultat que nous venons de transformer : les quadriques circonscrites à un tétraèdre à arêtes orthogonales, qui passent par son orthocentre, sont des hyperboloïdes équilatères.

(Ernest Duporcq, École Monge.)

Solution analogue par M. S. Lattès (lycée de Marseille.)

CONCOURS DE 1892

CONCOURS GÉNÉRAL DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

Mathématiques. (Paris et départements.)

158. — Soient Q une quadrique circonscrite à un ellipsoïde donné E, et A le pôle, par rapport à l'ellipsoïde, du plan P de la courbe de contact des deux surfaces :

1° Démontrer qu'il y a, en général, trois quadriques, Q_1, Q_2, Q_3, homofocales avec l'ellipsoïde E et telles que les plans polaires P_1, P_2, P_3 du point A par rapport aux quadriques Q_1, Q_2, Q_3 passent par le centre de la quadrique Q.

2° Les plans P_1, P_2, P_3 sont les plans principaux de la quadrique Q, et les coniques C_1, C_2, C_3, intersections des surfaces (P_1, Q_1), (P_2, Q_2), (P_3, Q_3), sont les focales de cette quadrique.

3° Les projections orthogonales des coniques C_1, C_2, C_3 sur les plans principaux de l'ellipsoïde E sont des coniques homofocales.

On projettera, en particulier, ces coniques sur le plan principal qui contient l'axe majeur et l'axe moyen de l'ellipsoïde, et l'on cherchera le lieu décrit par les foyers des coniques projetées, quand la quadrique Q varie en restant circonscrite à l'ellipsoïde, le plan P de la courbe de contact ne changeant pas.

(23 mai, de 10 h. à 4 h. 1/2.)

Physique (Paris).

I. — Détermination de l'état hygrométrique de l'air par la méthode de condensation et par la méthode psychrométrique. Discuter ces deux méthodes et les comparer au point de vue de l'exactitude des résultats que peut fournir chacune d'elles.

II. — **159.** On a proposé, pour comparer les valeurs de l'accélération de la pesanteur dans les différents lieux du globe, l'emploi d'un baromètre à siphon. Ce siphon serait à branches bien cylindriques, et la petite branche, renfermant un gaz sec, aurait été fermée à la lampe. Les variations de g se déduiraient des variations du niveau du mercure dans la petite branche. On demande d'établir la formule : 1° dans le cas où l'instrument serait toujours ramené à une température constante; 2° dans le cas où l'observation serait faite à une température quelconque; 3° dans le cas où, au lieu d'un gaz, on aurait enfermé dans la petite branche une vapeur en contact avec un excès du liquide générateur.

(20 mai, de 10 h. à 4 h. 1/2.)

Chimie (Paris).

I. — Combinaisons, étudiées dans le cours, du fluor et du chlore avec les métalloïdes autres que l'oxygène et l'hydrogène.

II. — **160.** On fait passer lentement du gaz oxygène pur et sec à travers un tube à effluves actionné par une forte bobine d'induction. La température est 0°, la pression 760. Le gaz à sa sortie traverse 100^{cc} d'une dissolution d'acide arsénieux contenant 9^{gr},9 d'acide arsénieux par litre. Quand l'opération est terminée, on ajoute 100^{cc} d'une solution d'iode dans l'iodure de potassium à 25^{gr},4 d'iode par litre. En supposant que l'effluve ait produit une contraction de 55^{cc},7, on demande quel sera le volume d'une solution d'hyposulfite de soude à 31^{gr},6 de sel anhydre par litre, qui sera nécessaire pour décolorer la solution arsénieuse additionnée d'iode. Equivalent du sodium : 23.

III. — **161.** On décompose un poids x d'azotite d'ammoniaque en utilisant la chaleur de combustion d'un certain volume d'hydrogène dans un calorimètre convenablement disposé. On demande de calculer ce poids x d'azotite d'ammoniaque décomposé, ainsi que les poids, et, s'il y a lieu, les volumes gazeux à 0 et 760 des produits de sa décomposition, à l'aide des données suivantes :

1° Poids de l'eau du calorimètre 1800^{gr};

2° Poids du calorimètre évalué en eau 73^{gr},5;

3° Élévation totale de température de l'eau du calorimètre 1°,393;

4° Élévation de température de l'eau du calorimètre résultant de la combustion de l'hydrogène seul sans intervention de l'azotite d'ammoniaque, 0°,378.

5° Chaleur de décomposition d'un gramme d'azotite d'ammoniaque 1^{cal},25.

(25 mai, de 10 h. à 4 h. 1/2.)

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Physique et chimie.

Physique. — I. — Réfraction par un prisme : d'un rayon lumineux, et d'un faisceau conique de rayons de très petite ouverture. (Il ne sera pas question de dispersion.)

II. — Thermomètre à poids.

Chimie. — Préparations usitées dans les laboratoires et dans les arts de tous les hydracides (acides non oxygénés) indiqués dans le programme de chimie.

[On ne demande rien sur les propriétés, analyses..., etc., de ces corps.]

(27 mai, de 7 h. à 10 h.)

Mathématiques.

162. — On donne une hyperbole équilatère et une circonférence (C) décrite sur une corde DD′ de cette hyperbole comme diamètre.

1° On mène dans la circonférence une corde perpendiculaire à DD′ : démontrer que la moitié de cette corde est moyenne proportionnelle entre les distances de son milieu aux points où elle rencontre l'hyperbole.

2° Indiquer dans quel cas les points d'intersection de la circonférence et de l'hyperbole sont tous réels.

3° Trouver le lieu des points de rencontre des secantes communes à l'hyperbole et à la circonférence, lorsque la corde DD′ se déplace en restant parallèle à une direction fixe.

4° Soit H un des points communs à l'hyperbole et au cercle mobile, A le point où la tangente a la circonférence en H coupe l'hyperbole, B le point où la tangente à l'hyperbole en H coupe la circonférence : prouver que la droite AB passe par un point fixe.

(28 mai, de 7 h. à 11 h.)

Calcul trigonométrique.

On donne les trois côtés d'un triangle :

$$a = 58124^{m},59, \qquad b = 46571^{m},46, \qquad c = 37604^{m},18.$$

Calculer les trois angles et la surface.

Résultats :

$$A = 86^{\circ}\,39'\,9'',78, \qquad B = 53^{\circ}\,7'\,3'',04, \qquad C = 40^{\circ}\,13'\,47'',18, \qquad S = 874\,146\,800^{mq}.$$

(28 mai, de 4 h. 1/2 à 6 h.)

Géométrie descriptive.

INTERSECTION D'UNE SPHÈRE ET D'UN CYLINDRE

163. — Le rayon de la sphère est de 80^{mm}. Le centre a sa projection horizontale à 90^{mm} du bord inférieur de la feuille, à 135^{mm} du bord de gauche, et à 220^{mm} de la projection verticale.

La trace horizontale du cylindre est un cercle de 60^{mm} de rayon, et dont le centre est à 140^{mm} du bord inférieur de la feuille et à 120^{mm} du bord de droite. Les génératrices sont de front, inclinées de 60° sur le plan horizontal, et s'élèvent de droite à gauche au-dessus de ce plan.

On demande de représenter par ses projections le solide qui reste, après que l'on a enlevé de la sphère la portion qui se trouve à l'intérieur du cylindre; les parties cachées seront tracées en points ronds.

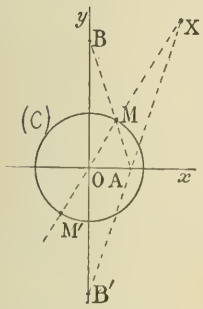
On indiquera en traits rouges la construction d'un point quelconque et des points remarquables de l'intersection, ainsi que celle des tangentes en ces points.

(30 mai, de 7 h. à 11 h.)

ÉCOLE NAVALE

Géométrie analytique (1).

164. — *Oxy* étant deux axes rectangulaires, (C) une circonférence, de rayon R ayant son centre à l'origine, B et B′ deux points sur l'axe des y à égale distance du centre, $OB = OB' = b$; on prend un point M sur la circonférence (C); la droite BM coupe l'axe des x en un point A; les deux droites OM et B′A prolongées se coupent en un point X.



1° On demande le lieu du point X quand le point M parcourt la circonférence. Ce lieu est une conique dont on met immédiatement en évidence un foyer et une directrice. Déterminer la nature de la courbe suivant la grandeur de b. Construction de la tangente au point X; elle coupe l'axe des x au même point que la tangente en M à la circonférence. Axes de la courbe.

2° En considérant, dans l'équation de ces coniques, b comme un paramètre arbitraire, on obtient un faisceau de coniques. Par chaque point X du plan passent deux de ces coniques. Reconnaître quelle est leur nature en séparant le plan en régions par des courbes convenables.

3° Les tangentes menées aux points où toutes les coniques de ce faisceau sont rencontrées par un diamètre prolongé tel que OMM′ passent par deux points fixes sur l'axe des x. En déduire le lieu des points du plan pour lesquels les tangeantes aux deux courbes qui passent par chacun de ces points sont rectangulaires.

(3 juin. — Géométrie et géométrie analytique, de 7 h. à 10 h. 1/2.)

NOTA. — La question 164 sera traitée dans le numéro de juillet.

QUESTIONS PROPOSÉES

165. — Le centre des moyennes distances des quatre points d'intersection d'une droite avec une lemniscate de Bernouilli est le pied de la perpendiculaire abaissée du centre de la lemniscate sur la droite.

(E. N. Barisien.)

166. — Étant donné un cylindre parabolique, on demande le lieu du foyer de la section faite dans ce cylindre par un plan mobile coupant le plan d'une section droite P du cylindre suivant une normale à cette section.

(E. Cretin, professeur au lycée Saint-Louis.)

(1) Les autres sujets du concours sont insérés dans le numéro du 15 juin du *Journal de Mathématiques élémentaires*.

167. — Trouver le lieu du centre ω du cercle passant par le centre O d'une hyperbole équilatère et tangent à cette hyperbole au point mobile M.

(L. P. Randon.)

168. — On donne le foyer ou le sommet d'une parabole passant par un point fixe ou tangente à une droite fixe. Trouver dans chacun de ces cas le lieu du sommet ou du foyer.

(L. Boë, Tarbes.)

169. — On considère toutes les coniques circonscrites à un quadrilatère ABCD et une droite fixe Δ rencontrant ces coniques en deux points variables P, Q. On prend sur chaque conique le conjugué harmonique M du point D par rapport à P et Q. Trouver le lieu de M.

(S. Lattès, lycée de Marseille.)

170. — Lieu des foyers des coniques inscrites dans un quadrilatère circonscrit à un cercle.

(A. Alayrac, lycée Saint-Louis.)

171. — Étant données une sphère et une quadrique, les normales abaissées du centre de la sphère sur toutes les quadriques qui passent par l'intersection de ces deux surfaces sont sur un cône du second ordre.

(C. Hugon.)

172. — Un poids P d'un certain corps, dont la température de fusion est T, est surfondu à une température $t < T$. On en détermine la solidification par un moyen quelconque. Connaissant sa chaleur de fusion λ à la température T de fusion et ses chaleurs spécifiques à l'état solide et à l'état liquide c et c_1, trouver la relation qui lie le poids p de la portion solidifiée à la température t° et cette température t. Construire la courbe représentée par cette relation.

On admettra que les chaleurs spécifiques c et c_1 sont indépendantes de la température; mais on tiendra compte de ce que λ varie avec la température.

Application numérique. — A quelle température doit-on amener du phosphore ou de l'eau surfondus pour que toute la masse se solidifie et remonte à la température de fusion T :

	T	λ	c	c_1
Eau :	0°	71	0,47	1
Phosphore :	44°,2	15	0,17	0,24.

(Henri Niewenglowski.)

ERRATUM. — N° 8, page 316, question 153, supprimer l'exposant 2.

Le Rédacteur-Gérant : H. VUIBERT.

Paris. — Imp. Chaix. — 12396-5-92.

2e Année. N° 10. Juillet 1892.

REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

ÉCOLE NAVALE (Concours de 1892).

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

164. — Oxy *étant deux axes rectangulaires,* (C) *une circonférence de rayon* R *ayant son centre à l'origine,* B *et* B′ *deux points sur l'axe des* y *à égale distance du centre,* OB = OB′ = b; *on prend un point* M *sur la circonférence* (C); *la droite* BM *coupe l'axe des* x *en un point* A; *les deux droites* OM *et* B′A *prolongées se coupent en un point* X.

1° On demande le lieu du point X *quand le point* M *parcourt la circonférence. Ce lieu est une conique dont on met immédiatement en évidence un foyer et une directrice. Déterminer la nature de la courbe suivant la grandeur de* b. *Construction de la tangente au point* X; *elle coupe l'axe des* x *au même point que la tangente en* M *à la circonférence. Axes de la courbe.*

2° En considérant, dans l'équation de ces coniques, b *comme un paramètre arbitraire, on obtient un faisceau de coniques. Par chaque point* X *du plan passent deux de ces coniques. Reconnaître quelle est leur nature en séparant le plan en régions par des courbes convenables.*

3° Les tangentes menées aux points où toutes les coniques de ce faisceau sont rencontrées par un diamètre prolongé tel que OMM′ *passent par deux points fixes sur l'axe des* x. *En déduire le lieu des points du plan pour lesquels les tangentes aux deux courbes qui passent par chacun de ces points sont rectangulaires.*

SOLUTION ANALYTIQUE

1° Équation du lieu. — Appelons φ l'angle positif inférieur à 2π que devrait décrire une demi-droite d'abord appliquée sur Ox pour s'appliquer sur la direction OM. Les coordonnées du point mobile M sont $R\cos\varphi$ et $R\sin\varphi$ et le coefficient angulaire de la droite BMA a pour valeur $\frac{b - R\sin\varphi}{-R\cos\varphi}$; la droite B′A symétrique de la précédente par rapport aux axes de coordonnées a donc pour coefficient angulaire $\frac{b - R\sin\varphi}{R\cos\varphi}$, et pour équation

$$y + b = \frac{b - R\sin\varphi}{R\cos\varphi}\,x. \tag{1}$$

La droite OM est représentée par

$$y = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\,x. \tag{2}$$

Il suffit d'éliminer φ entre ces deux équations pour avoir l'équation du lieu. Ajoutons-les d'abord membre à membre; nous aurons l'équation

$$2y + b = \frac{bx}{R\cos\varphi}, \tag{3}$$

qui représente une droite passant par le point de rencontre des deux premières et pouvant remplacer l'une d'elles, la droite (1), par exemple. Les équations (3) et (2) donnent

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{R}{b}(2y + b)\cos\varphi \\ y &= \frac{R}{b}(2y + b)\sin\varphi \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

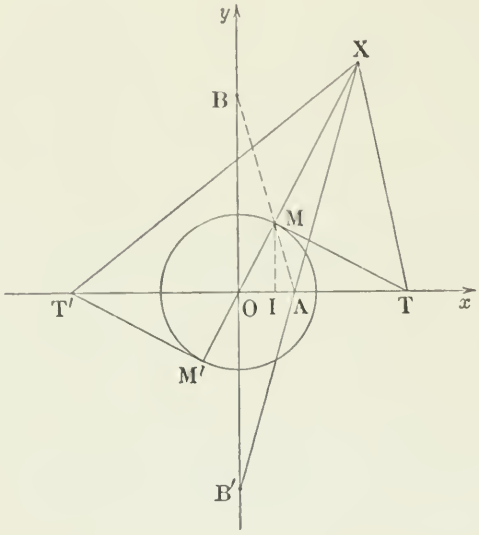
Ajoutons membre à membre après avoir élevé au carré, nous obtenons l'équation du lieu

$$x^2 + y^2 = \frac{R^2}{b^2}(2y + b)^2,$$

ou bien

$$x^2 + y^2 = \frac{4R^2}{b^2}\left(y + \frac{b}{2}\right)^2. \qquad (5)$$

L'élévation au carré n'introduit pas de solution étrangère parce que changer le signe de $\cos\varphi$ ou de $\sin\varphi$ ou de $\cos\varphi$ et $\sin\varphi$ revient à remplacer l'angle φ par $\pi - \varphi$, ou $2\pi - \varphi$, ou $\pi + \varphi$, ce qui est permis.



Réciproquement si l'on prend sur la courbe représentée par l'équation (5) un point quelconque de coordonnées x et y, les équations (4) donneront pour $\cos\varphi$ et $\sin\varphi$ des valeurs correspondantes acceptables; il existera entre zéro et 2π un angle φ et un seul admettant ce cosinus et ce sinus; par conséquent, à un point choisi arbitrairement sur la courbe (5) correspond un point M et un seul de la circonférence donnée. Si l'on applique à ce point M la construction indiquée dans l'énoncé, on aura le point de coordonnées x, y.

L'équation (5) représente une section conique ayant un foyer à l'origine des coordonnées; la directrice correspondante a pour équation $y + \frac{b}{2} = 0$. L'excentricité est la valeur absolue du rapport $\frac{2R}{b}$. L'axe focal est dirigé suivant l'axe des y; la demi-corde focale perpendiculaire à cet axe, c'est-à-dire le *paramètre* de la courbe s'obtient en faisant $y = 0$ dans l'équation (5); on trouve $x = \pm R$; la courbe passe donc par les extrémités du diamètre dirigé suivant Ox, et le paramètre a pour valeur R.

Genre de la conique. — Le genre de la conique dépend de l'excentricité, c'est-à-dire de la valeur absolue du rapport $\frac{2R}{b}$, ou du rapport égal $\frac{R}{\frac{1}{2}b}$.

Si la valeur absolue de $\frac{1}{2}b$ est
- supérieure à R, la courbe est une ellipse.
- égale à R, la courbe est une parabole.
- inférieure à R, la courbe est une hyperbole.

Tangente au point X. — Supposons que les coordonnées x_1, y_1 du point X soient définies par les équations (4), c'est-à-dire que l'on ait

$$x_1 = \frac{R}{b}(2y_1 + b)\cos\varphi,$$

$$y_1 = \frac{R}{b}(2y_1 + b)\sin\varphi.$$

On sait que la tangente à la courbe en ce point a pour équation

$$x\cos\varphi + y\sin\varphi - \frac{R}{b}(2y + b) = 0.$$

L'équation de la tangente au cercle au point M est

$$x \cos \varphi + y \sin \varphi - R = 0.$$

Or, en faisant $y = 0$ dans ces deux équations, on obtient

$$x = \frac{R}{\cos \varphi}. \tag{6}$$

Les deux tangentes coupent donc l'axe des x au même point : il suffit donc, pour avoir la tangente en X, de joindre à ce point le point où la tangente au cercle en M coupe l'axe des x.

Axes de la conique. — Si $b^2 = 4R^2$, l'équation (5) représente une parabole et il n'y a pas lieu de chercher ses axes ; supposons $b^2 \neq 4R^2$. Le centre de la conique a pour coordonnées

$$x = 0, \qquad y = \frac{2R^2 b}{b^2 - 4R^2}.$$

Transportons en ce point l'origine des coordonnées en conservant aux axes leurs directions primitives; l'équation devient, y' désignant l'ordonnée nouvelle d'un point quelconque du plan,

$$x^2 + \frac{b^2 - 4R^2}{b^2} y'^2 - \frac{R^2 b^2}{b^2 - 4R^2} = 0,$$

c'est-à-dire

$$\frac{x^2}{\dfrac{R^2 b^2}{b^2 - 4R^2}} + \frac{y'^2}{\dfrac{R^2 b^4}{(b^2 - 4R^2)^2}} - 1 = 0.$$

La longueur du demi-axe focal est donc la valeur absolue de $\dfrac{Rb^2}{b^2 - 4R^2}$; celle du demi-axe non focal est $\dfrac{Rb}{\sqrt{b^2 - 4R^2}}$ s'il s'agit d'une ellipse, et $\dfrac{Rb}{\sqrt{4R^2 - b^2}}$ si la courbe est une hyperbole. Ces longueurs sont faciles à construire géométriquement.

2° Regardons dans l'équation (5) b comme un paramètre pouvant prendre toutes les valeurs de $-\infty$ à $+\infty$ et ordonnons cette équation par rapport à b; elle s'écrit

$$(x^2 + y^2 - R^2)b^2 - 4R^2 y.b - 4R^2 y^2 = 0. \tag{5'}$$

Supposons que x et y désignent les coordonnées d'un point donné dans le plan; cette équation donne alors pour b deux valeurs. La condition de réalité est :

$$R^2 y^2 + y^2(x^2 + y^2 - R^2) \geqslant 0$$

c'est-à-dire

$$y^2(x^2 + y^2) \geqslant 0.$$

Il est d'ailleurs évident qu'à chaque valeur de b correspond une conique et une seule. Par conséquent, si l'on écarte le cas où le point donné est sur l'axe des x (*), on voit que l'équation (5') admet deux racines réelles et distinctes. Par tout point du plan on peut donc faire passer deux coniques réelles et distinctes représentées par l'équation (5).

Pour trouver le genre de chacune d'elles, rappelons-nous qu'à toute valeur de b supérieure à $2R$ ou inférieure à $-2R$ correspond une ellipse ; et qu'à toute valeur de b comprise entre ces limites correspond une hyperbole. Posons

$$z = \frac{2R - b}{2R + b} \qquad \text{d'où} \qquad b = \frac{2R(1 - z)}{1 + z}.$$

Il est clair que si b est compris entre $-2R$ et $+2R$, z sera positif, tandis que ce nombre

(*) Les deux valeurs de b sont alors nulles, en général, et l'équation (5) représente pour $b = 0$ une droite double confondue avec l'axe des x. Si le point donné est en même temps sur la circonférence, les valeurs de b sont indéterminées. On pouvait le prévoir : car nous avons remarqué que *toutes* les coniques représentées par (5) passent par les points communs à l'axe des x et à la circonférence.

sera négatif si b n'est pas compris dans cet intervalle. L'équation (5') devient après ce changement d'inconnue

$$(x^2 + y^2 - R^2)(1 - z)^2 - 2Ry(1 - z^2) - y^2(1 + z)^2 = 0$$

ou bien

$$(x^2 + 2Ry - R^2)z^2 - 2(x^2 + 2y^2 - R^2)z + x^2 - 2Ry - R^2 = 0.$$

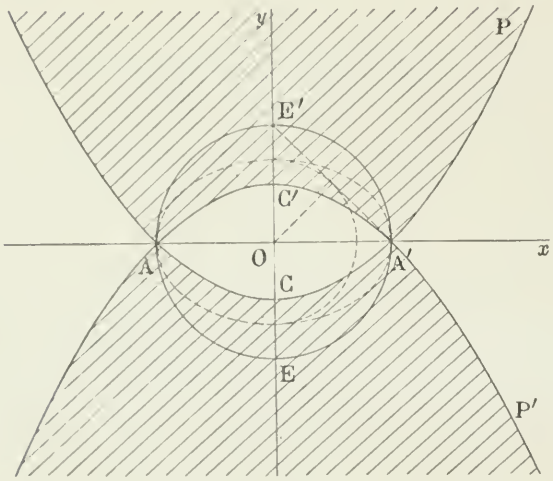
Les signes des racines de cette équation dépendent des signes des trois fonctions de x et y

$$x^2 + 2Ry - R^2, \qquad x^2 + 2y^2 - R^2, \qquad x^2 - 2Ry - R^2.$$

En les égalant à zéro on obtient les trois équations

$$x^2 + 2Ry - R^2 = 0, \qquad x^2 + 2y^2 - R^2 = 0, \qquad x^2 - 2Ry - R^2 = 0;$$

la première et la troisième représentent les paraboles P et P' déjà représentées par l'équation (5) dans laquelle on suppose successivement $b = -2R$ et $b = 2R$. La seconde représente une ellipse passant par les deux points A et A' communs aux paraboles et ne les rencontrant en aucun autre point; le grand axe est AA'; le demi petit axe vaut $R\sqrt{2}$, de sorte qu'il surpasse $\frac{R}{2}$ distance du foyer au sommet C ou C' des deux paraboles P et P'. Il en résulte que l'ellipse est tout entière extérieure à la partie du plan comprise entre les arcs paraboliques ACA', AC'A'.



Supposons que le point donné soit dans la partie du plan comprise entre ces arcs, les trois fonctions qui forment les coefficients de l'équation en z sont négatives; les racines sont donc positives et les coniques sont deux hyperboles. Le résultat est le même si le point donné est extérieur aux trois courbes : car les trois fonctions sont alors positives. Enfin, si le point donné est intérieur à l'une des paraboles et extérieur à l'autre, le produit des valeurs de z est négatif et les coniques sont une ellipse et une hyperbole. La région du plan dans laquelle doit se trouver le point pour qu'il en soit ainsi est couverte de hachures. Par un point donné dans la région restée blanche passent deux hyperboles.

Remarque. — Quand on suppose b donné l'équation (5) représente une seule conique, et nous avons vu qu'à tout point X de cette conique correspond une valeur de φ et une seule comprise entre zéro et 2π. Si, le point X étant donné, on détermine b par l'équation (5'), on trouve deux valeurs b' et b'' pour b; on peut prévoir aisément que les deux valeurs de φ correspondantes diffèrent de π; nous allons le constater par le calcul.

La valeur de $\cos\varphi$ qui correspond aux valeurs données x, y, et b' est fournie par la première formule (4); appelons-la $\cos\varphi'$

$$\cos\varphi' = \frac{b'x}{R(2y + b')}; \qquad \text{soit de même} \qquad \cos\varphi'' = \frac{b''x}{R(2y + b'')}.$$

La somme $\cos\varphi' + \cos\varphi''$ est donc

$$\frac{x}{R}\left(\frac{b'}{2y + b'} + \frac{b''}{2y + b''}\right) = \frac{2x}{R(2y + b')(2y + b'')}[b'b'' + y(b' + b'')].$$

Or l'équation (5') montre immédiatement que la quantité entre crochets est nulle. Ainsi $\cos\varphi'' = -\cos\varphi'$. On voit de même que $\sin\varphi'' = -\sin\varphi'$. Donc les extrémités des arcs φ' et φ'' sont diamétralement opposées.

3° La remarque précédente permet de trouver facilement le lieu des points tels que les tangentes aux deux coniques qui passent par chacun d'eux soient rectangulaires. Soit $X(x, y)$ l'un de ces points, φ et $\varphi + \pi$ les arcs correspondants; on sait que les tangentes en X aux deux coniques ont mêmes abscisses à l'origine que les tangentes au cercle menées par les extrémités des arcs φ et $\varphi + \pi$. Les coefficients angulaires des tangentes en X aux coniques sont donc

$$\frac{y}{x - \dfrac{R}{\cos\varphi}} \qquad \text{et} \qquad \frac{y}{x + \dfrac{R}{\cos\varphi}}.$$

Pour que les tangentes soient rectangulaires, il faut et il suffit que les coordonnées x, y satisfassent à la condition

$$\frac{y^2}{x^2 - \dfrac{R^2}{\cos^2\varphi}} = -1 \qquad \text{ou bien} \qquad x^2 + y^2 - \frac{R^2}{\cos^2\varphi} = 0.$$

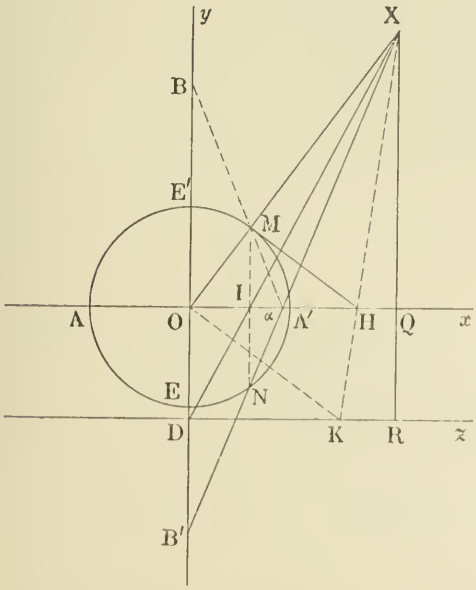
Mais $\operatorname{tg}\varphi$ étant égal à $\dfrac{y}{x}$, $\cos^2\varphi = \dfrac{x^2}{x^2 + y^2}$. L'équation précédente devient alors

$$(x^2 + y^2)(x^2 - R^2) = 0.$$

En supprimant les droites isotropes qu'on devait trouver puisque l'origine est foyer commun à toutes les coniques, on voit que le lieu demandé se compose de deux tangentes au cercle donne parallèles à l'axe des y.

SOLUTION GÉOMÉTRIQUE

1° Les deux droites $B\alpha$ et $B'\alpha$ étant symétriques par rapport à Ox, rencontrent le cercle en des points symétriques M et N, de sorte que Ox est perpendiculaire au milieu I de MN. Il en résulte que la droite XI passe par le milieu D de OB'. Par le point fixe D, menons Dz parallèle à Ox et abaissons XQR perpendiculaire sur Dz. On a :



$$\frac{\overline{OX}}{\overline{OM}} = \frac{\overline{DX}}{\overline{DI}} = \frac{\overline{RX}}{\overline{RQ}}, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{\overline{OX}}{\overline{RX}} = \frac{\overline{OM}}{\overline{RQ}} = \frac{R}{\frac{1}{2}b}.$$

Ainsi le rapport des distances du point X au point fixe O et à la droite fixe Dz est constant. Donc le lieu demandé est une section conique ayant O pour foyer et Dz pour directrice. L'excentricité est $\dfrac{R}{\frac{1}{2}b}$ ou $\dfrac{2R}{b}$. Suivant que le point D est intérieur ou extérieur au cercle, la courbe est une hyperbole ou une ellipse. S'il est sur la circonférence soit en E, soit en E', le lieu est une parabole; on a ainsi deux paraboles P et P'.

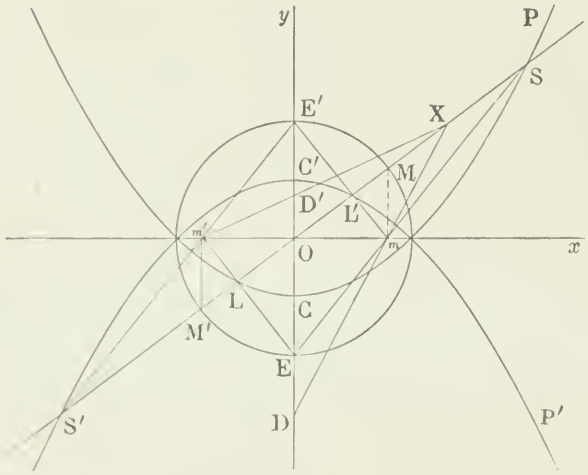
Toutes ces coniques passent par les extrémités A et A' du diamètre dirigé suivant Ox : car le rapport des distances de chacun de ces points au foyer et à la directrice est $\dfrac{R}{\frac{1}{2}b}$.

Soit H le point où la tangente en X rencontre la droite Ox et K le point où elle coupe la directrice. On sait que la droite OK est perpendiculaire au rayon vecteur Ox. Menons MH. On a évidemment

$$\frac{\overline{KX}}{\overline{KH}} = \frac{\overline{DX}}{\overline{DI}} = \frac{\overline{OX}}{\overline{OM}}.$$

Donc MH est parallèle à OK et, par suite, perpendiculaire sur le rayon OM. C'est donc la tangente en M au cercle. Ainsi *la tangente à la courbe en* X, *et la tangente au point correspondant du cercle coupent* Ox *au même point*. On peut construire la tangente en X en se servant soit du point K, soit du point H faciles à déterminer.

2° Supposons donné le point X et traçons le diamètre qui passe par ce point; projetons sur Ox en m et m' les deux points M et M′ où ce diamètre coupe la circonférence; les droites Xm et Xm' rencontrent Oy aux deux points D et D′ pieds des directrices de deux coniques qui passent au point donné. Leurs genres sont déterminés par les positions de D et D′ relativement aux extrémités du diamètre EE′.



Construisons les deux paraboles P et P′ dont les directrices passent en E et E′. La droite indéfinie OX rencontre P en deux points L et S, P′ en deux autres points L′ et S′; cette droite est divisée par les quatre points S′, L, L′, S en cinq régions; supposons le point X sur la région L′S; la droite Xm est alors dans l'angle SmL' dont les côtés passent nécessairement en E et E′; donc cette droite rencontre Oy en un point D qui ne peut être entre E et E′, et qui par suite correspond à une ellipse. La droite Xm' n'est pas dans l'angle $S'm'L$ mais dans son supplément; le point D′ où elle coupe Oy est donc entre E et E′ et ce point correspond à une hyperbole.

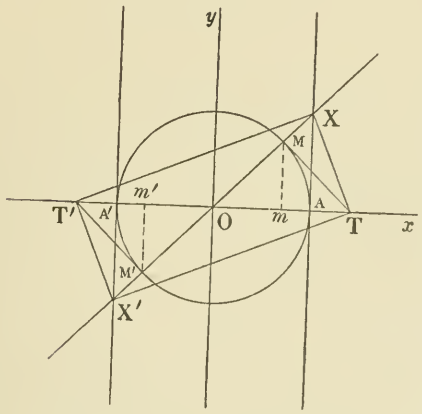
Un raisonnement analogue fait pour les autres régions conduit aux conséquences énoncées dans la solution analytique.

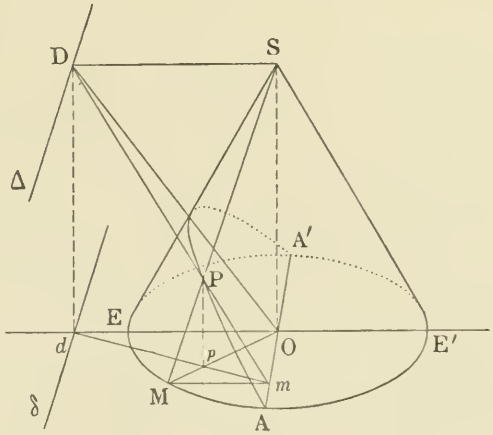
3° Menons un diamètre quelconque MOM′, et prenons un point X sur ce diamètre. Les tangentes aux deux coniques qui passent par ce point rencontrent Ox aux mêmes points T et T′ que les tangentes en M et M′ au cercle. Pour que l'angle TXT′ de ces tangentes soit droit, il faut et il suffit que la médiane OX du triangle TXT′ soit égale à OT moitié de TT′. Ainsi sur chaque diamètre se trouvent deux points X et X′ tels que les tangentes aux deux coniques qui passent soit par l'un soit par l'autre sont rectangulaires. Il est d'ailleurs évident que ces points X et X′ se projettent sur Ox aux extrémités A et A′ du diamètre dirigé suivant Ox puisque les triangles OAX, OA′X′ sont égaux au triangle rectangle OMT. Donc le lieu demandé est l'ensemble des tangentes menées par A et A′ au cercle donné.

Remarque. — La question qui vient de nous occuper peut être étudiée d'une tout autre manière. Imaginons un cône de révolution ayant pour base le cercle donné, et coupons-le par un plan passant par le diamètre AA′ suivant lequel était dirigé l'axe des x. Le plan sécant coupe le plan mené par le sommet S du cône parallèlement au plan du cercle suivant une droite Δ. Menons la perpendiculaire

SD sur cette droite, et projetons sur le plan du cercle la droite Δ en δ et la perpendiculaire SD en Od, diamètre perpendiculaire à AA′.

Considérons une génératrice SM du cône; le plan DSM coupe le plan de projection suivant Mm





parallèle à SD et Od, et par conséquent perpendiculaire au diamètre AA′. Le plan sécant coupe ce plan DSM suivant Dm, droite qui rencontre la génératrice SM en un point P. Ainsi tout point de l'intersection du plan sécant et du cône est situé sur les deux droites SM et Dm; or ces droites se projettent suivant le rayon OM et la droite dm. Ce sont précisément les deux génératrices du lieu géométrique que l'on vient d'étudier.

Plusieurs des propriétés établies sont des conséquences immédiates de cette remarque.

E. Dessenon.

M. J. Hervé, élève de marine au lycée de Rochefort, et M. C. Rau, élève du lycée Condorcet, ont envoyé chacun une bonne solution de la question.

ALGÈBRE

137. — *Demontrer que l'équation*

$$x^n + \frac{n^p}{1^q} a x^{n-1} + \frac{\overline{n(n-1)}^p}{(2!)^q} a^2 x^{n-2} + \frac{\overline{n(n-1)(n-2)}^p}{(3!)^q} a^3 x^{n-3} + \ldots + \frac{(n!)^p}{(n!)^q} a^n = 0$$

a toutes ses racines réelles.

On sait que si une équation $f(x) = 0$ a toutes ses racines réelles, il en est de même de l'équation

$$\alpha f(x) + \beta f'(x) + \gamma f''(x) + \ldots + \lambda f^{(n)}(x) = 0, \qquad \text{(A)}$$

les constantes α, β, γ, ... étant telles que l'équation

$$\alpha x^n + \beta x^{n-1} + \gamma x^{n-2} + \ldots + \lambda = 0$$

ait toutes ses racines réelles. Le théorème est également vrai pour l'équation

$$\alpha f^{(n)}(x) + \beta f^{(n-1)}(x) + \ldots + \lambda f(x) = 0. \qquad \text{(B)}$$

Posons $f(x) = x^n$ et prenons pour $\alpha, \beta, \ldots \lambda$ les coefficients du polynome $(x+a)(x+b)\ldots(x+l)$; nous obtenons les équations

$$x^n + \Sigma a.nx^{n-1} + \Sigma ab.n(n-1)x^{n-2} + \ldots + ab\ldots l.n! = 0 \qquad (1)$$

et

$$n! + \Sigma a.\frac{n!}{1}.x + \Sigma ab.\frac{n!}{2!}.x^2 + \ldots + ab\ldots l.x^n = 0$$

ou, en changeant x en $\frac{1}{x}$ et divisant par $n!$

$$x^n + \Sigma a.x^{n-1} + \Sigma ab.\frac{x^2}{1.2} + \ldots + \frac{abc\ldots l}{n!} = 0. \qquad (2)$$

Les équations (1) et (2) ont leurs racines réelles. En posant $a = b = \ldots = l$, ces équations deviennent

$$x^n + \frac{n^2a}{1}.x^{n-1} + \frac{\overline{n(n-1)}^2}{1.2}a^2.x^{n-2} + \ldots + \frac{(n!)^2}{n!}a^n = 0 \qquad (3)$$

et

$$x^n + \frac{na}{1}.x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{(1.2)^2}a^2x^2 + \ldots + \frac{a^n}{n!} = 0. \qquad (4)$$

Les équations (3) et (4) ont leurs racines réelles. Par conséquent nous pouvons appliquer le théorème rappelé plus haut à l'équation $x^n = 0$ en prenant pour $\alpha, \beta, \ldots \lambda$ les coefficients de l'une ou de l'autre de ces équations. Prenons par exemple les coefficients de l'équation (3) et substituons-les dans (B) nous obtiendrons l'équation

$$f^{(n)}(x) + \frac{n^2a}{1}f^{(n-1)}(x) + \frac{\overline{n(n-1)}^2}{1.2}a^2f^{(n-2)}(x) + \ldots + \frac{(n!)^2}{n!}a^nf(x) = 0,$$

qui a toutes ses racines réelles si l'équation $f(x) = 0$ a elle-même toutes ses racines réelles. En posant $f(x) = x^n$, puis prenant comme plus haut l'équation aux inverses et divisant les coefficients par $n!$ on obtient

$$x^n + \frac{n^2}{1^2}a.x^{n-1} + \frac{\overline{n(n-1)}^2}{(2!)^2}.a^2x^{n-2} + \ldots + a^n = 0. \qquad (5)$$

On a ainsi trouvé une nouvelle suite de coefficients $\alpha, \beta, \ldots \lambda$ qui pourront servir en appliquant à l'équation $f(x) = 0$ soit la formule (A), soit la formule (B). En prenant une fois de plus la formule (B), nous obtenons l'équation

$$f^{(n)}(x) + \frac{n^2}{1^2}a.f^{(n-1)}(x) + \frac{\overline{n(n-1)}^2}{(2!)^2}a^2f^{(n-2)}(x) + \ldots + \frac{(n!)^2}{(n!)^2}a^nf(x) = 0,$$

qui a toutes ses racines réelles si $f(x) = 0$ a elle-même toutes ses racines réelles. Nous poserons encore $f(x) \equiv x^n$, puis nous prendrons l'équation aux inverses et nous diviserons par $n!$; on obtient ainsi

$$x^n + \frac{n^2}{1^3}a.x^{n-1} + \frac{\overline{n(n-1)}^2}{2!^3}a^2x^{n-2} + \ldots + \frac{(n!)^2}{(n!)^3}a^n = 0.$$

Cette équation a donc toutes ses racines réelles. En appliquant cette méthode et en se servant p fois de la formule (A), q fois de la formule (B), on obtiendra donc une équation de la forme

$$x^n + \frac{n^p}{1^q}a.x^{n-1} + \frac{\overline{n(n-1)}^p}{2!^q}a^2x^{n-2} + \frac{\overline{n(n-1)(n-2)}^p}{3!^q}a^3x^{n-3} + \ldots + \frac{(n!)^p}{(n!)^q}a^n = 0,$$

qui a toutes ses racines réelles.

Remarque. — Le théorème sur lequel nous nous sommes appuyé est fort connu; néanmoins nous allons en rappeler la démonstration.

En observant que l'équation $e^{ax} = 0$, dans laquelle a est un nombre réel, n'a aucune racine

réelle finie, on peut appliquer le théorème de Rolle à l'équation $e^{ax}f(x) = 0$, pourvu que ce théorème soit applicable à $f(x)$. Supposons pour plus de simplicité que $f(x)$ soit un polynome de degré m et que $f(x) = 0$ ait toutes ses racines réelles. On en conclut que l'équation obtenue en égalant à zéro la dérivée de $e^{ax}f(x)$, c'est-à-dire $e^{ax}[af(x) + f'(x)] = 0$, a $m - 1$ racines réelles finies; par conséquent, l'équation $af(x) + f'(x) = 0$ a toutes ses racines réelles. En remplaçant a par $-\frac{1}{a}$, on voit que si $f(x) = 0$ a toutes ses racines réelles, l'équation $f(x) - af'(x) = 0$ a aussi toutes ses racines réelles quand on suppose que a est un nombre réel. Cela étant, soit b un second nombre réel (qui d'ailleurs peut-être égal à a); l'équation $f(x) - af'(x) = 0$ ayant toutes ses racines réelles, il en est de même de l'équation

$$f(x) - af'(x) - b[f'(x) - af''(x)] = 0 \qquad \text{ou} \qquad f(x) - (a + b)f'(x) + abf''(x) = 0$$

En appliquant m fois ce théorème avec des constantes réelles $a, b \ldots l$, on arrive à l'équation

$$f(x) - S_1 f'(x) + S_2 f''(x) - \ldots\ldots + (-1)^m S_m f^{(m)}(x) = 0,$$

dans laquelle S_p désigne la somme des produits p à p des nombres $a, b, \ldots l$. Cela étant, si l'équation

$$\alpha x^m + \beta x^{m-1} + \ldots + \lambda = 0$$

a toutes ses racines réelles, on peut prendre pour $a, b, \ldots l$ les racines de cette équation, de sorte que l'on aura $S_1 = \frac{-\beta}{\alpha}$, $S_2 = \frac{\gamma}{\alpha}$, $\cdots$ etc., et par suite l'équation

$$\alpha f(x) + \beta f'(x) + \gamma f''(x) + \ldots\ldots = 0$$

aura bien toutes ses racines réelles.

---

149. — *Évaluer le volume compris entre le plan des* xy *et les surfaces représentées par les équations*

$$z = \frac{xy}{a}, \qquad x^2 + y^2 - 2a(x + y) + a^2 = 0.$$

Transportons l'origine des coordonnées au centre de la base du cylindre de révolution donné; les équations des surfaces deviennent

$$z = \frac{(x + a)(y + a)}{a}, \qquad x^2 + y^2 = a^2.$$

On a

$$\frac{dV}{dx} = \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{+\sqrt{a^2-x^2}} \frac{(x + a)(y + a)}{a}\,dy = \frac{x + a}{a}\left[\frac{(\sqrt{a^2 - x^2} + a)^2 - (\sqrt{a^2 - x^2} - a)^2}{2}\right] = 2(x+a)\sqrt{a^2 - x^2};$$

donc

$$V = 2\int_{-a}^{+a} (x + a)\sqrt{a^2 - x^2}\,dx.$$

Or $\int_{-a}^{+a} \sqrt{a^2 - x^2}\,dx$ est l'aire du demi-cercle de rayon a, soit $\frac{\pi a^2}{2}$.

Il reste à calculer l'intégrale $\int_{-a}^{+a} x\sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \int_{-a}^{+a} \sqrt{a^2 - x^2}\,x\,dx.$

Cette intégrale est évidemment nulle, car ses éléments sont deux à deux égaux et de signes contraires. (D'ailleurs on a $\int \sqrt{a^2 - x^2}\,x\,dx = -\frac{1}{3}(a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}$, et cette expression est nulle pour $x = +a$ et pour $x = -a$).

Donc :

$$V = \pi a^3.$$

Giuseppe SANTACROCE, école industrielle de Foggia.

Solutions exactes et analogues, par MM. AUDIBERT (Marseille), L. MAURY, répétiteur au lycée d'Alais, et Charles TURCHIN (Université de Ferrare). M. Audibert a traité aussi la même question en faisant usage des coordonnées polaires.

NOTE SUR LES CUBIQUES UNICURSALES

L'équation d'une cubique ayant un point double avec tangentes distinctes, rapportée à un triangle de référence dont un sommet est le point double, est de la forme

$$Ay^3 + Bxy^2 + Cx^2y + Dx^3 + z(y - \alpha x)(y - \beta x) = 0.$$

Une droite ayant pour équation $y = tx$ coupe la cubique au point double et en un point différent; nous dirons que ce dernier point a pour paramètre t.

Nous allons d'abord chercher la relation qui doit exister entre les paramètres de trois points A_1, A_2, A_3 de la cubique pour que ces points soient en ligne droite.

Soit $ux + vy - z = 0$ l'équation d'une droite D; les paramètres des points de rencontre de la droite D et de la cubique sont les racines de l'équation

$$At^3 + Bt^2 + Ct + D + (t - \alpha)(t - \beta)(u + vt) = 0. \qquad (1)$$

Désignons par $\varphi(t)$ le polynome du troisième degré $At^3 + Bt^2 + Ct + D$ et posons $t = \alpha + \theta$; l'équation (1) devient ainsi

$$\varphi(\alpha) + \theta\varphi'(\alpha) + \frac{\theta^2}{2}\varphi''(\alpha) + A\theta^3 + \theta(\alpha - \beta + \theta)(u + v\alpha + v\theta) = 0.$$

Le terme tout connu est $\varphi(\alpha)$ et le coefficient de θ^3 est égal à $v + A$; le produit des racines de l'équation précédente est donc égal à

$$-\frac{\varphi(\alpha)}{v + A},$$

de sorte que si t_1, t_2, t_3 désignent les racines de l'équation (1), on a

$$(t_1 - \alpha)(t_2 - \alpha)(t_3 - \alpha) = -\frac{\varphi(\alpha)}{v + A}.$$

Pour la même raison $$(t_1 - \beta)(t_2 - \beta)(t_3 - \beta) = -\frac{\varphi(\beta)}{v + A},$$

et par suite $$\frac{(t_1 - \alpha)(t_2 - \alpha)(t_3 - \alpha)}{(t_1 - \beta)(t_2 - \beta)(t_3 - \beta)} = \frac{\varphi(\alpha)}{\varphi(\beta)}. \qquad (2)$$

A la vérité, le calcul précédent suppose $v + A \neq 0$, ce qui exige qu'aucun des points A_1, A_2, A_3 ne soit sur l'axe des y. Si le point A_1 se trouve sur cet axe, le coefficient t_1 est infini. On peut supposer que $v + A$ tende vers zéro et remplacer dans le premier membre de l'équation (2) le rapport $\frac{t_1 - \alpha}{t_1 - \beta}$ par sa limite, qui est l'unité.

Il convient encore de remarquer que la cubique considérée n'est pas supposée tangente à l'axe des y. Dans le cas contraire, supposons que β par exemple croisse indéfiniment en valeur absolue; à la limite, l'équation (2) devient

$$(t_1 - \alpha)(t_2 - \alpha)(t_3 - \alpha) = -\frac{\varphi(\alpha)}{A}.$$

et si en outre α devient nul $$t_1t_2t_3 = -\frac{D}{A}.$$

Ces résultats peuvent d'ailleurs se vérifier directement, de sorte que nous regarderons l'équation (2) comme établie dans tous les cas.

Réciproquement, si la relation (2) est vérifiée, les points A_1, A_2, A_3 de la cubique sont en ligne droite.

En effet, soient t_2, t_3 les coefficients angulaires des droites OA_2, OA_3; la droite A_2A_3 coupe la cubique en un troisième point A dont le paramètre t est défini par l'équation

$$\frac{(t-\alpha)(t_2-\alpha)(t_3-\alpha)}{(t-\beta)(t_2-\beta)(t_3-\beta)} = \frac{\varphi(\alpha)}{\varphi(\beta)}. \tag{2'}$$

La comparaison des équations (2) et (2') donne $t = t_1$; par suite les points A et A_1 coïncident, ce qui signifie que trois points A_1, A_2, A_3 dont les paramètres t_1, t_2, t_3 vérifient l'équation (2) sont en ligne droite.

Corollaires. I. — La tangente au point A_1 (t_1) coupe la courbe en un point A_2 dont le paramètre t_2 est défini par l'équation

$$\frac{(t_1-\alpha)^2(t_2-\alpha)}{(t_1-\beta)^2(t_2-\beta)} = \frac{\varphi(\alpha)}{\varphi(\beta)}, \tag{3}$$

et réciproquement, si les paramètres t_1, t_2 de deux points A_1, A_2 sont liés par la relation (3) la droite A_1A_2 est tangente à la cubique donnée au point A_1.

En effet, si la droite A_1A_2 est tangente en A_1, on peut dire que deux points d'intersection de cette droite avec la cubique sont confondus en A_1; en supposant par exemple que t_3 devienne égal à t_1, on obtient la relation (3) en faisant $t_3 = t_1$ dans l'équation (2); réciproquement, si cette relation est vérifiée, la droite A_1A_2 coupe la cubique en un troisième point t_3; et en comparant les relations (2) et (3), vérifiées toutes les deux par hypothèse, on en conclut que $t_3 = t_1$, c'est-à-dire que la droite A_1A_2 est tangente en A_1.

II. — Un raisonnement analogue montre que la condition nécessaire et suffisante pour que le point A_1 (t_1) soit un point d'inflexion, c'est-à-dire pour que la tangente en A_1 coupe la cubique en trois points confondus avec A_1, est

$$\frac{(t_1-\alpha)^3}{(t_1-\beta)^3} = \frac{\varphi(\alpha)}{\varphi(\beta)}. \tag{4}$$

Cette dernière équation permet de trouver combien une cubique à point crunodal a de points d'inflexion réels. Par hypothèse α et β ainsi que tous les coefficients de l'équation de la cubique sont réels; l'équation (4) a donc une racine réelle et deux racines imaginaires conjuguées. Une cubique de l'espèce considérée a donc un point d'inflexion réel et deux points d'inflexion imaginaires conjugués.

En désignant par ω et ω^2 les racines cubiques imaginaires de l'unité et par t, t', t'' les paramètres des trois points d'inflexion trouvés, on a

$$\frac{t-\alpha}{t-\beta} = \sqrt[3]{\frac{\varphi(\alpha)}{\varphi(\beta)}},$$

$$\frac{t'-\alpha}{t'-\beta} = \omega\sqrt[3]{\frac{\varphi(\alpha)}{\varphi(\beta)}},$$

$$\frac{t''-\alpha}{t''-\beta} = \omega^2\sqrt[3]{\frac{\varphi(\alpha)}{\varphi(\beta)}},$$

d'où l'on déduit

$$\frac{(t-\alpha)(t'-\alpha)(t''-\alpha)}{(t-\beta)(t'-\beta)(t''-\beta)} = \frac{\varphi(\alpha)}{\varphi(\beta)};$$

donc les trois points d'inflexion sont sur une droite réelle.

Quand les tangentes au point double sont imaginaires, ou, ce qui revient au même, quand la cubique a un point double isolé, α et β sont imaginaires conjugués; on peut éviter l'emploi de coefficients imaginaires de la manière suivante (*) :

(*) Voir *Leçons de géométrie analytique*, par MM. C. Briot et J.-C. Bouquet, édition revue par M. Appell, p. 474.

Posons $$\alpha = a + bi, \qquad \beta = a - bi$$

et, en remarquant que $\varphi(\alpha)$ et $\varphi(\beta)$ étant imaginaires conjugués ont même module :

$$\varphi(\alpha) = r(\cos\lambda + i\sin\lambda), \qquad \varphi(\beta) = r(\cos\lambda - i\sin\lambda),$$

de sorte que $$\frac{\varphi(\alpha)}{\varphi(\beta)} = \cos 2\lambda + i\sin 2\lambda.$$

On aura ainsi :

$$\frac{t-\alpha}{t-\beta} = \frac{\dfrac{a-t}{b} + i}{\dfrac{a-t}{b} - i};$$

de sorte qu'en posant $\dfrac{a-t}{b} = \operatorname{cotg}\theta$ on obtient

$$\frac{t-\alpha}{t-\beta} = \cos 2\theta + i\sin 2\theta.$$

La relation entre les paramètres de trois points en ligne droite sur la cubique devient ainsi

$$\cos 2(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) + i\sin 2(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) = \cos 2\lambda + i\sin 2\lambda,$$

θ_1 étant la valeur de θ qui correspond à $t = t_1$, etc. Cette dernière relation équivaut à

$$\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = \lambda + k\pi, \tag{5}$$

k étant un entier arbitraire.

Les points d'inflexion de la cubique sont définis par l'équation

$$3\theta = \lambda + k\pi,$$

ce qui donne trois déterminations distinctes

$$\theta_1 = \frac{\lambda}{3}, \qquad \theta_2 = \frac{\lambda}{3} + \frac{\pi}{3}, \qquad \theta_3 = \frac{\lambda}{3} + \frac{2\pi}{3}.$$

Ces trois déterminations vérifient la condition

$$\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = \lambda + \pi.$$

Donc, en remarquant qu'à une valeur réelle de t correspond une valeur réelle de θ, et réciproquement, on peut énoncer cette proposition : Toute cubique à point double isolé possède trois points d'inflexion réels situés en ligne droite.

Considérons en second lieu une cubique ayant un point de rebroussement. L'équation de cette courbe est de la forme

$$Ay^3 + Bxy^2 + Cx^2y + Dx^3 + 2z(y - \alpha x)^2 = 0.$$

L'équation déterminant les paramètres des droites joignant le point de rebroussement aux points d'intersection de la cubique avec une droite représentée par l'équation $ux + vy - z = 0$, est, en conservant les mêmes notations que plus haut,

$$\varphi(t) + (t-\alpha)^2(u + vt) = 0$$

ou en posant $$t = \alpha + \theta,$$

$$\varphi(\alpha) + \theta\varphi'(\alpha) + \ldots = 0,$$

d'où $$\frac{1}{\theta_1} + \frac{1}{\theta_2} + \frac{1}{\theta_3} = -\frac{\varphi'(\alpha)}{\varphi(\alpha)},$$

c'est-à-dire $$\frac{1}{\alpha - t_1} + \frac{1}{\alpha - t_2} + \frac{1}{\alpha - t_3} = \frac{\varphi'(\alpha)}{\varphi(\alpha)}. \tag{6}$$

Telle est la relation entre les paramètres t_1, t_2, t_3 de trois points en ligne droite situés sur la cubique.

On voit comme dans le cas du point double à tangentes distinctes, que la condition (6) est nécessaire et suffisante.

On déduit d'ailleurs très facilement cette relation de la relation (2) en posant $\beta = \alpha + h$ et faisant tendre h vers zéro.

Corollaires. I. — En supposant $t_3 = t_1$ on obtient

$$\frac{2}{\alpha - t_1} + \frac{1}{\alpha - t_2} = \frac{\varphi'(\alpha)}{\varphi(\alpha)}. \tag{7}$$

C'est la condition nécessaire et suffisante pour que la droite A_1A_2 soit tangente en A_1 à la cubique, t_1 étant le paramètre du point A_1, t_2 celui du point A_2.

II. — Le point A_1 pris sur la cubique sera un point d'inflexion si son paramètre t_1 vérifie l'équation obtenue en faisant $t_2 = t_1$ dans l'équation (7); ce qui donne

$$\frac{3}{\alpha - t_1} = \frac{\varphi'(\alpha)}{\varphi(\alpha)}. \tag{8}$$

D'après cela, *toute cubique à point de rebroussement possède un seul point d'inflexion, qui est réel.*

Si l'on désigne par θ le paramètre du point d'inflexion on voit, en comparant les équations (6) et (8), que la condition nécessaire et suffisante pour que trois points pris sur la cubique soient en ligne droite, est que leurs paramètres t_1, t_2, t_3 vérifient la relation

$$\frac{1}{t_1 - \alpha} + \frac{1}{t_2 - \alpha} + \frac{1}{t_3 - \alpha} = \frac{3}{\theta - \alpha}. \tag{7'}$$

De même la condition pour que A_1A_2 soit tangente en A_1 peut s'écrire

$$\frac{2}{t_1 - \alpha} + \frac{1}{t_2 - \alpha} = \frac{3}{\theta - \alpha}. \tag{8'}$$

On trouvera sans difficulté, en suivant la même marche, la condition pour que six points d'une cubique à point double soient sur une conique; cette condition, nécessaire et suffisante, est

$$\frac{(t_1 - \alpha)(t_2 - \alpha)(t_3 - \alpha)(t_4 - \alpha)(t_5 - \alpha)(t_6 - \alpha)}{(t_1 - \beta)(t_2 - \beta)(t_3 - \beta)(t_4 - \beta)(t_5 - \beta)(t_6 - \beta)} = \left[\frac{\varphi(\alpha)}{\varphi(\beta)}\right]^2,$$

et quand le point double est un point de rebroussement :

$$\frac{1}{\alpha - t_1} + \frac{1}{\alpha - t_2} + \frac{1}{\alpha - t_3} + \frac{1}{\alpha - t_4} + \frac{1}{\alpha - t_5} + \frac{1}{\alpha - t_6} = \frac{2\varphi'(\alpha)}{\varphi(\alpha)}.$$

Nous allons maintenant appliquer les résultats à la résolution d'un problème proposé au Concours général, en 1880. Voici l'énoncé du problème.

Sur une courbe donnée du troisième degré, ayant un point de rebroussement O, *on considère une suite de points* $A_{-n}, A_{-(n-1)} \ldots A_{-2}, A_{-1}, A_0, A_1 \ldots A_n$ *tels que la tangente en chacun de ces points rencontre la courbe au point suivant :*

1° Étant données les coordonnées du point A_0, *on propose de trouver les coordonnées des points* A_{-n}, A_n, *et de déterminer les limites vers lesquelles tendent ces points quand l'indice* n *augmente indéfiniment.*

2° On demande le lieu décrit par ce premier point limite lorsque la courbe du troisième degré se déforme en conservant le même point de rebroussement O, *la même tangente en ce point, et en passant constamment par trois points fixes* P, Q, R.

3° On étudiera comment varient les points d'intersection de ce lieu et les côtés du triangle PQR, *quand les sommets de ce triangle se déplacent sur des droites passant par le point* O.

1° La cubique ayant, par hypothèse, un point d'inflexion O et la tangente en ce point étant donnée, nous pouvons la prendre pour axe des x, l'axe des y étant une droite quelconque passant par le point de rebroussement. Soient A_p, A_{p+1} deux points consécutifs de la suite considérée, et t_p, t_{p+1}, leurs paramètres, 0 étant le paramètre du point d'inflexion. On a, en faisant $\alpha = 0$ dans la formule (8)' :

$$\frac{2}{t_p} + \frac{1}{t_{p+1}} = \frac{3}{0}$$

ou, en posant

$$\frac{1}{t_p} - \frac{1}{0} = \lambda_p :$$

$$2\lambda_p = -\lambda_{p+1}.$$

On a donc, successivement

$$2\lambda_0 = -\lambda_1,$$
$$2\lambda_1 = -\lambda_2,$$
$$\cdots\cdots$$
$$2\lambda_{n-1} = -\lambda_n,$$

d'où l'on tire

$$\lambda_n = (-1)^n.2^n.\lambda_0.$$

On en conclut que λ_∞ est infini ; mais $\lambda_\infty = \frac{1}{t_\infty} - \frac{1}{0}$, donc $t_\infty = 0$ et par suite le point A_∞ n'est pas autre chose que le point de rebroussement donné O.

D'autre part :

$$2\lambda_{-1} = -\lambda_0,$$
$$2\lambda_{-2} = -\lambda_{-1},$$
$$2\lambda_{-n} = -\lambda_{(n-1)},$$

d'où

$$\lambda_{-n} = (-1)^n.\frac{1}{2^n}\lambda_0,$$

et par suite $\lambda_{-\infty} = 0$, ce qui prouve que $t_{-\infty} = 0$. En d'autres termes, la limite du point A_{-n} est le point d'inflexion.

2° Pour résoudre simplement les deux dernières parties, nous prendrons pour triangle de référence le triangle ayant pour sommet le point O, le côté opposé étant la droite QR, la tangente au point de rebroussement étant un second côté et le troisième côté passant par le point P.

Soient $y = 0$ l'équation de la tangente, $x = 0$ celle du côté OP et $z = 0$ celle du côté QR; représentons par $y + qx = 0$ et $y + rx = 0$ les équations des droites OQ et OR. L'équation de la cubique pourra se mettre sous la forme

$$zy^2 + p(y + qx)(y + rx)(y + sx) = 0, \tag{9}$$

p et s désignant deux paramètres. Coupons la cubique par le côté OP; en faisant $x = 0$, on obtient $y^2 = 0$ et $z + py = 0$. Cette dernière équation représente une droite joignant le point P au point de rencontre du côté QR et de la tangente de rebroussement, par suite le paramètre p est donné. Le seul paramètre variable est donc s.

Cela étant, en posant $\varphi(t) = p(t + q)(t + r)(t + s)$,

on peut, comme plus haut, déterminer un point de la cubique par son paramètre t, $y = tx$ étant l'équation de la droite qui joint ce point au point de rebroussement. D'après cela le paramètre du point d'inflexion est défini par l'équation (8), qui devient ici

$$-\frac{3}{t} = \frac{\varphi'(0)}{\varphi(0)} = \frac{1}{q} + \frac{1}{r} + \frac{1}{s}.$$

Les coordonnées de ce point vérifient donc les équations (9) et (10)

$$3x + \left(\frac{1}{q} + \frac{1}{r} + \frac{1}{s}\right) y = 0. \tag{10}$$

On obtiendra le lieu du point d'inflexion en éliminant s entre ces deux équations. On trouve ainsi :

$$y = 0 \quad \text{et} \quad pzy[3qrx + (q + r)y] + (y + qx)(y + rx)[2qrx + (q + r)y] = 0. \qquad (11)$$

Le lieu est donc une cubique, car la solution $y = 0$ est évidemment une solution étrangère, dont la présence est d'ailleurs facile à expliquer.

La cubique trouvée a un point double qui n'est autre que le point O. L'une des tangentes au point O a pour équation $y = 0$; c'est la tangente au point de rebroussement de la cubique variable représentée par l'équation (9); la seconde tangente au point O a pour équation $3qrx + (q + r)y = 0$.

3° La cubique représentée par l'équation (11) est coupée par la droite QR aux points Q. R et en outre, au point de rencontre de QR avec la droite définie par l'équation

$$2qrx + (q + r)y = 0.$$

Or cette droite est la conjuguée harmonique de la tangente au point de rebroussement de la cubique (9) par rapport au système des deux droites OQ, OR; le lieu du point d'inflexion de la cubique (11) coupe donc les côtés du triangle PQR en des points qui décrivent des droites fixes passant par le point O, quand les sommets du triangle PQR décrivent eux-mêmes des droites passant par le point O.

Ce dernier résultat est évident : il suffit de se rappeler que quand une cubique a un point de rebroussement, la polaire harmonique de son point d'inflexion est la tangente de rebroussement.

CONCOURS DE 1892

ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

Mathématiques.

173 — Un cercle C est représenté en coordonnées rectangulaires par l'équation

$$x^2 + y^2 - 2x - 1 = 0. \qquad (C)$$

1° On demande de former l'équation générale des coniques A qui sont doublement tangentes au cercle C de telle façon que la corde qui joint les deux points de contact passe par l'origine des coordonnées, et qui sont en outre tangentes à la droite D ayant pour équation

$$y = x\sqrt{3} + \sqrt{3}.$$

2° Par un point quelconque M du plan, de coordonnées α, β, il passe en général deux coniques de cette espèce A′, A″; où le point M doit-il se trouver pour que ces coniques soient réelles?

3° Les deux coniques A′, A″ qui passent au point M ont trois autres points communs M_1, M_2, M_3, dont on demande de calculer les coordonnées en fonction des coordonnées α, β du point M.

4° Former l'équation de l'hyperbole équilatère H qui passe par les quatre points M_1, M_2, M_3, M, et montrer que cette hyperbole passe par quatre points fixes quand le point M se déplace.

5° Trouver le lieu des points d'intersection des deux coniques A′, A″ et l'enveloppe de leurs sécantes communes, lorsque les cordes de contact de ces deux coniques avec le cercle C sont perpendiculaires. — Quelle est, dans ce même cas, l'espèce des coniques A′, A″?

N. B. — On prendra pour paramètre variable le coefficient angulaire m de la corde de contact de la conique A avec le cercle C.

(13 juin, durée 6 h.)

Physique.

174. — Dans quelles conditions émerge d'un prisme polygonal convexe un faisceau étroit qui a éprouvé une série de réflexions intérieures, dans une même section droite?

Examiner, en particulier, le cas où la section du prisme est un triangle équilatéral.

175. — Quelle est, en colonne d'eau, la pression à l'intérieur d'une bulle de savon de 4 centimètres de diamètre, la constante capillaire (ou tension superficielle) du liquide qui constitue la bulle étant 75 en unités Centimètre-Gramme-Seconde?

(14 juin, durée 6 h.)

QUESTIONS PROPOSÉES

176. — On donne trois coniques ayant un foyer F commun.

1° Démontrer que l'enveloppe des droites telles que leurs pôles par rapport à ces trois coniques soient en ligne droite est une conique ayant un de ses foyers en F.

2° On considère les surfaces de révolutions engendrées par la révolution autour de leur axe focal de trois coniques ayant un foyer commun (mais non situées dans un même plan). Démontrer que l'enveloppe des plans tels que leurs pôles par rapport aux trois surfaces soient ~~dans un même plan~~ en ligne droite est un cône du second degré.

3° Condition pour que ce cône devienne un cylindre.

(G. Cuny, école Saint-Sigisbert, à Nancy.)

***177.** — Un cercle quelconque passant par le sommet d'une parabole, coupe cette parabole en trois autres points A, B C. Trouver le lieu du point de concours des normales à la parabole en ces points, quand le rayon du cercle reste constant.

(E. N. Barisien.)

***178.** — On joint le sommet O d'une parabole P à un point quelconque M de cette parabole. Lorsque M se déplace sur P, la droite menée par le point M et perpendiculaire à OM est normale à une parabole P_1.

(E. N. Barisien.)

***179.** — Étant donnée une parabole P de sommet O, et M un point quelconque sur la parabole, le cercle décrit sur OM comme diamètre coupe cette parabole en deux autres points P, Q. Démontrer que si le point M se déplace sur la parabole donnée : 1° la droite PQ passe par un point fixe ; 2° la perpendiculaire abaissée de M sur PO, reste normale à une parabole déterminée.

(E. N. Barisien.)

Le Rédacteur-Gérant : H. VUIBERT.

Paris — Imp. Chaix. — 15048-6-92.

REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Questions d'examen.

180. — *Étudier la variation de la fonction* $y = e^{\frac{x^2}{x^2-1}}$

On voit tout d'abord que la fonction ne change pas quand on change x en $-x$; il suffira donc de faire varier x de 0 à $+\infty$. Calculons la dérivée de y par rapport à x. On obtient, en appliquant le théorème des fonctions de fonctions,

$$y' = y \times \frac{-2x}{(x^2-1)^2},$$

ce qui montre que la fonction y est décroissante dans tous les intervalles où elle est continue; ces intervalles sont de 0 à 1 et de 1 à $+\infty$. Pour $x = 0$, $y = 1$; pour $x = +\infty$, $y = e$. Il reste à examiner ce qui se passe quand x tend vers 1; il est nécessaire de distinguer deux cas suivant que x passe par des valeurs inférieures ou par des valeurs supérieures à 1. On peut écrire

$$\frac{x^2}{x^2-1} = \frac{1}{x-1} \cdot \frac{x^2}{x+1}.$$

Si $x-1$ tend vers zéro par valeurs positives, la fraction $\frac{x^2}{x^2-1}$ est infinie et positive; donc quand x croît de 1 à $+\infty$, y décroît de $+\infty$ à e; si au contraire $x-1$ tend vers zéro par valeurs négatives, $\frac{x^2}{x^2-1}$ est infinie et négative et y tend vers zéro; par suite quand x varie de 0 à $+1$, y décroît de 1 à 0. Calculons la valeur de y' pour $x = 0$ et quand x tend vers 1. Pour $x = 0$, on a immédiatement $y' = 0$. Pour voir ce qui se passe quand x tend vers 1, nous écrirons :

$$y' = \frac{-2x}{(x^2-1)^2} \cdot e^{1+\frac{1}{x^2-1}}.$$

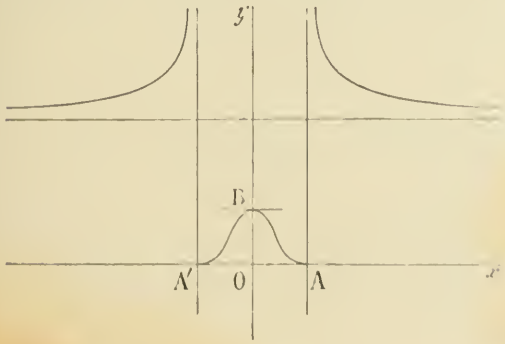
Or,

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right);$$

donc

$$y' = \frac{-2x}{(x+1)^2} e^{1-\frac{1}{2(x-1)}} \times \frac{e^{\frac{1}{2(x-1)}}}{(x-1)^2}.$$

Nous avons mis ainsi en évidence deux facteurs. Le premier a pour limite $-\frac{1}{2}e^{\frac{3}{2}}$; pour trouver la limite du second posons $\frac{1}{2(x-1)} = -z$, de sorte qu'il reste à trouver la limite de $\frac{4z^2}{e^z}$ quand z croît indéfiniment. Si l'on suppose $x-1 < 0$, z est positif, $\frac{e^z}{z^2}$ croît indéfiniment et par suite lim. $y' = 0$. Si l'on suppose au contraire $x-1 > 0$, z est négatif, et par suite $\frac{z^2}{e^z}$ croît indéfiniment; alors y' est infinie.



Il résulte de ce qui précède que la courbe représentée par l'équation $y = e^{\frac{x^2}{x^2-1}}$ a la forme ci-dessus.

On a pris OA = OB = 1.

Remarque. — La courbe ayant pour équation $y = e^{\frac{f(x)}{(x-a)\varphi(x)}}$ possède deux points d'arrêt d'abscisse a, en supposant a réel, et $f(a) \neq 0$, $\varphi(a) \neq 0$.

Pour fixer les idées, supposons $\frac{f(a)}{\varphi(a)} > 0$. En faisant croître x de $a - h$ à $a + h$, la fraction $\frac{f(x)}{(x-a)\varphi(x)}$ passe de $-\infty$ à $+\infty$ et par suite quand x tend vers a par valeurs inférieures à a, y tend vers zéro; si x tend vers a par valeurs supérieures à a, y est infini positif.

On a
$$y = e^{\frac{f(a)}{\varphi(a)(x-a)} + \frac{f_1(x)}{\varphi(x)}} = e^{\frac{f_1(x)}{\varphi(x)}} \cdot e^{\frac{f(a)}{\varphi(a)(x-a)}};$$
pour abréger, posons $\frac{f_1(x)}{\varphi(x)} = u$, de sorte que
$$y = e^u \cdot e^{\frac{f(a)}{(x-a)\varphi(a)}};$$
on trouve, en calculant la dérivée,
$$y' = y\left[u' - \frac{f(a)}{(x-a)^2\varphi(a)}\right].$$

Il s'agit de trouver la limite de y' quand x tend vers a par valeurs inférieures à a. Dans ces conditions y tend vers zéro; u' tend vers une valeur finie, puisque $\varphi(a)$ est différent de zéro; donc il reste à calculer la limite de
$$-\frac{f(a)}{\varphi(a)} \cdot \frac{y}{(x-a)^2},$$
c'est-à-dire celle de
$$-\frac{f(a)}{\varphi(a)} e^u \cdot \frac{e^{\frac{f(a)}{(x-a)\varphi(a)}}}{(x-a)^2}.$$

Le facteur $-\frac{f(a)}{\varphi(a)} e^u$ a une limite finie; pour avoir la limite du second facteur, posons
$$\frac{f(a)}{(x-a)\varphi(a)} = -z;$$
ce second facteur devient ainsi $\left(\frac{\varphi(a)}{f(a)}\right)^2 \cdot \frac{z^2}{e^z}$, dont la limite est zéro, quand z croît indéfiniment par valeurs positives. Donc la tangente au point $x = a$, à la branche finie est l'axe des x.

---

181. — *Calculer la valeur de la série*
$$\frac{1}{1^3} + \frac{1}{(1.2)^3} + \ldots + \frac{1}{(1.2\ldots n)^3} + \ldots$$
à 0,0001 *près.*

Calculons l'erreur commise quand on s'arrête à un terme quelconque $\frac{1}{(1.2\ldots n)^3}$.

On a
$$R_n = \frac{1}{(1.2\ldots n)^3}\left[\frac{1}{(n+1)^3} + \frac{1}{(n+1)^3(n+2)^3} + \ldots\right].$$

La série entre crochets est moindre que la série géométrique
$$\frac{1}{(n+1)^3} + \frac{1}{(n+1)^6} + \frac{1}{(n+1)^9} + \ldots$$

dont la limite est égale à $\dfrac{1}{n^3 + 3n^2 + 3n}$; par suite

$$R_n = \frac{1}{(1.2 \ldots n)^3} \times \frac{\theta}{n^3 + 3n^2 + 3n} \qquad 0 < \theta < 1.$$

Cela posé

$$\frac{1}{1^3} = 1,$$

$$\frac{1}{(1.2)^3} = 0{,}125.$$

$$\frac{1}{(1.2.3)^3} = 0{,}00462 \ldots$$

Pour calculer le terme suivant on doit diviser le troisième terme par 64, ce qui donne moins que 0,00007; or d'après ce qui précède, l'erreur commise en s'arrêtant au quatrième terme est moindre que ce terme; donc, il faudrait ajouter, à la somme des trois premiers termes, une somme moindre que $0{,}00007 \times 2$ ou 0,00014. La somme des trois premiers termes est égale à

$$1{,}12962 \ldots,$$

c'est-à-dire supérieure à 1,1296.

Mais la somme est moindre que $1{,}12962 + 0{,}00014$ ou 1,12976, elle est donc comprise entre 1,1296 et 1,1298. Par suite, elle est égale à 1,1297 à 0,0001 près.

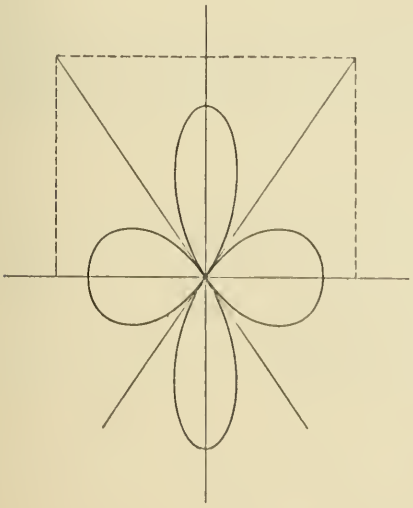
---

182. — *Étant donnée une ellipse, on mène deux diamètres conjugués variables* OA, OB, *et l'on demande le lieu des points de concours des normales en* A *et en* B.

Si l'on rapporte l'ellipse à ses axes de symétrie, on peut représenter les coordonnées de A par $a \cos \varphi$ et $b \sin \varphi$; celles du point B, extrémité du diamètre conjugué à OA, seront $-a \sin \varphi$, $b \cos \varphi$. Les équations des deux normales en A et B sont donc

$$\frac{ax}{\cos \varphi} - \frac{by}{\sin \varphi} = c^2,$$

$$\frac{ax}{\sin \varphi} + \frac{by}{\cos \varphi} = -c^2.$$



On en déduit

$$\cos \varphi = \frac{a^2x^2 + b^2y^2}{c^2(ax - by)}, \qquad \sin \varphi = \frac{-(a^2x^2 + b^2y^2)}{c^2(ax + by)};$$

l'équation du lieu est donc définie par l'équation

$$\frac{(a^2x^2 + b^2y^2)^2}{c^4}\left[\frac{1}{(ax - by)^2} + \frac{1}{(ax + by)^2}\right] = 1,$$

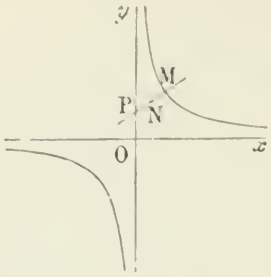
ou

$$2(a^2x^2 + b^2y^2)^3 - c^4(a^2x^2 - b^2y^2)^2 = 0.$$

Cette équation représente une courbe du 6e degré, symétrique par rapport aux axes, ayant un point quadruple à l'origine, les tangentes étant les diamètres conjugués égaux de l'ellipse proposée, après qu'on l'a fait tourner de 90° autour de son centre. Toute droite passant par le centre de l'ellipse coupe la courbe en deux points réels autres que le point quadruple; cette courbe a la forme ci-contre.

---

183. — *Trouver le lieu du milieu du segment compris entre le point d'incidence d'une normale à une hyperbole équilatère et l'une des asymptotes.*



Rapportons la courbe à ses deux asymptotes et soit

$$xy = a^2 \qquad (1)$$

son équation. La normale au point x, y a pour équation

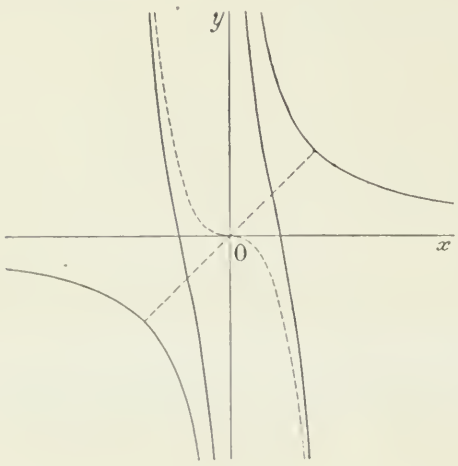
$$\frac{X - x}{y} = \frac{Y - y}{x}; \qquad (2)$$

elle coupe l'axe des y par exemple, au point ayant pour ordonnée

$$Y_1 = y - \frac{x^2}{y}.$$

Si l'on appelle X, Y les coordonnées d'un point N du lieu, on a

$$Y = y - \frac{x^2}{2y}, \qquad (3)$$



et l'équation du lieu s'obtiendra en éliminant x et y entre les équations (1), (3) et l'équation $X = \frac{x}{2}$. Cette dernière donne $x = 2X$; en portant cette valeur dans l'équation (1) nous obtenons $y = \frac{a^2}{2X}$. L'équation du lieu est donc la suivante :

$$Y = \frac{a^2}{2X} - \frac{4X^3}{a^2}.$$

On voit immédiatement que l'origine est un centre de la courbe. On construira d'abord la courbe représentée par l'équation

$$Y = -\frac{4X^3}{a^2}$$

et l'on ajoutera $\frac{a^2}{2X}$ à chaque ordonnée, ce qui montre que la courbe auxiliaire est une courbe asymptotique. Il suffit de faire varier X de 0 à $+\infty$; on aura le restant de la courbe en tenant compte de ce que l'origine est centre.

La courbe à la forme indiquée ci-dessus.

---

184. — *Trouver le lieu du second foyer d'une conique qui passe par deux points* M_1, M_2 *et qui a un foyer donné* O.

Prenons deux axes rectangulaires passant par le foyer donné O, l'axe des x étant parallèle à la droite M_1M_2. Soient x_1, y_1 et x_2, y_2 les coordonnées de M_1 et M_2 ; l'équation d'une conique ayant pour foyer l'origine des coordonnées étant

$$x^2 + y^2 = (lx + my + p)^2,$$

en exprimant que cette conique passe par les points M_1, M_2 on obtient les conditions

$$lx_1 + my_1 + p = \varepsilon_1 d_1, \qquad lx_2 + my_1 + p = \varepsilon_2 d_2,$$

d_1 et d_2 désignant les longueurs OM_1, OM_2 et ε_1 et ε_2 désignant ± 1 : mais comme l, m, p n'entrent que par leurs carrés, on peut remplacer le système précédent par celui-ci :

$$lx_1 + my_1 + p = d_1, \qquad lx_2 + my_1 + p = d_2, \tag{1}$$

et nous changerons ensuite d_2 en $-d_2$.

Cela étant, si les coordonnées du second foyer sont x et y, celles du centre seront $\frac{x}{2}$, $\frac{y}{2}$; le lieu du second foyer est homothétique de celui du centre. On a donc, en remplaçant x et y par $\frac{x}{2}$ et $\frac{y}{2}$ dans les équations du centre :

$$x = l(lx + my + 2p), \qquad y = m(lx + my + 2p). \tag{2}$$

Nous avons à éliminer l, m, p entre les équations (1) et (2).

Les équations (1) donnent immédiatement

$$l = \frac{d_1 - d_2}{x_1 - x_2}.$$

Or on déduit des équations (2)

$$mx = ly$$

(cette équation aurait pu être écrite immédiatement, car elle exprime que les foyers sont sur une perpendiculaire à la directrice);

de sorte que

$$m = \frac{y(d_1 - d_2)}{x(x_1 - x_2)}$$

et par suite, en substituant ces expressions de l et m dans (1),

$$p = \frac{x(x_1 d_2 - x_2 d_1) + yy_1(d_2 - d_1)}{x(x_1 - x_2)}.$$

L'équation du lieu s'obtiendra en portant l, m, p dans l'une des équations (2), ce qui donne

$$x^2(x_1 - x_2)^2 = (d_1 - d_2)^2\left[x^2 + y^2 - 2x\frac{d_1x_2 - x_1d_2}{d_1 - d_2} - 2yy_1\right]; \tag{3}$$

On obtient ainsi une première conique bitangente au cercle défini par l'équation

$$x^2 + y^2 - 2x\frac{d_1x_2 - d_2x_1}{d_1 - d_2} - 2yy_1 = 0,$$

la corde des contacts étant l'axe des y. Ce cercle qui passe par l'origine a pour centre le point de rencontre de M_1M_2 avec l'une des bissectrices de l'angle M_1OM_2.

En changeant d_2 en $-d_2$, on obtiendra de même l'équation

$$x^2(x_1 - x_2)^2 = (d_1 + d_2)^2\left[x^2 + y^2 - 2x\frac{d_1x_2 + d_2x_1}{d_1 + d_2} - 2yy_1\right] = 0, \tag{4}$$

qui représente une seconde conique bitangente à un cercle passant par l'origine et dont le centre est le point de rencontre de M_1M_2 avec l'autre bissectrice de l'angle M_1OM_2; il en résulte que ces deux coniques se coupent, au moins en deux points, à angle droit. Pour les étudier d'une manière plus précise, transportons l'origine des coordonnées au milieu de M_1M_2 sans changer la direction des axes. Faisons le calcul sur l'équation (4). Remarquons d'abord que cette équation peut s'écrire ainsi :

$$x^2[(d_1 + d_2)^2 - (x_1 - x_2)^2] - 2x(d_1 + d_2)(d_1x_2 + d_2x_1) + (d_1 + d_2)^2(y - y_1)^2 = (d_1 + d_2)^2y_1^2.$$

Le coefficient de x^2 est égal à $d_1^2 - x_1^2 + d_2^2 - x_2^2 + 2d_1d_2 + 2x_1x_2$, c'est-à-dire égal à

$$2(y_1^2 + d_1d_2 + x_1x_2);$$

on a ensuite

$$\begin{aligned}(d_1 + d_2)(d_1x_2 + d_2x_1) &= d_1^2x_2 + d_2^2x_1 + d_1d_2(x_1 + x_2)\\ &= y_1^2(x_1 + x_2) + x_1x_2(x_1 + x_2) + d_1d_2(x_1 + x_2)\\ &= (x_1 + x_2)(y_1^2 + d_1d_2 + x_1x_2),\end{aligned}$$

de sorte que l'on peut écrire

$$2(y_1^2 + d_1d_2 + x_1x_2)[x^2 - x(x_1 + x_2)] + (d_1 + d_2)^2(y - y_1)^2 = (d_1 + d_2)^2 y_1^2;$$

l'équation rapportée aux nouveaux axes est donc

$$2(y_1^2 + d_1d_2 + x_1x_2)X^2 + (d_1 + d_2)^2Y^2 = (d_1 + d_2)^2 y_1^2 + \left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2 [(d_1 + d_2)^2 - (x_1 - x_2)^2].$$

Or $(x_1 + x_2)(x_1 - x_2) = x_1^2 - x_2^2 = d_1^2 - d_2^2$, donc on peut mettre $(d_1 + d_2)^2$ en facteur dans le second membre, ce qui donne

$$(d_1 + d_2)^2\left[y_1^2 + \left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2 - \left(\frac{d_1 - d_2}{2}\right)^2\right] = (d_1 + d_2)^2 \frac{y_1^2 + x_1x_2 + d_1d_2}{2}.$$

L'équation cherchée est donc finalement

$$\frac{4X^2}{(d_1 + d_2)^2} + \frac{2Y^2}{y_1^2 + x_1x_2 + d_1d_2} = 1$$

ou

$$\frac{X^2}{\left(\frac{d_1 + d_2}{2}\right)^2} + \frac{Y^2}{\left(\frac{d_1 + d_2}{2}\right)^2 - \left(\frac{x_1 - x_2}{2}\right)^2} = 1.$$

L'expression $(d_1 + d_2)^2 - (x_1 - x_2)^2$ est évidemment positive; la courbe est une ellipse dont les demi-axes sont définis par les équations

$$a^2 = \frac{(d_1 + d_2)^2}{4}, \qquad b^2 = \frac{(d_1 + d_2)^2 - (x_1 - x_2)^2}{4}$$

et par suite

$$a^2 - b^2 = \left(\frac{x_1 - x_2}{2}\right)^2 = \frac{\overline{M_1M_2}^2}{4},$$

ce qui prouve que M_1 et M_2 sont les foyers.

La seconde conique a pour équation

$$\frac{X^2}{\left(\frac{d_1 - d_2}{2}\right)^2} - \frac{Y^2}{\left(\frac{x_1 - x_2}{2}\right)^2 - \left(\frac{d_1 - d_2}{2}\right)^2} = 1;$$

c'est une hyperbole ayant aussi pour foyers M_1 et M_2; elle coupe donc la première courbe à angle droit.

Solution géométrique. — Les résultats précédents s'obtiennent très simplement par la géométrie. En effet, soit F le foyer d'une ellipse passant par M_1 et M_2; O étant un premier foyer, on a

$$M_1O + M_1F = M_2O + M_2F;$$

donc

$$M_1F - M_2F = M_2O - M_1O;$$

le point F est donc sur une hyperbole ayant M_1 et M_2 pour foyers et passant par le point O.

Supposons maintenant que F soit foyer d'une hyperbole passant par M_1 et M_2 et ayant un foyer en O; si M_1 et M_2 sont sur une même branche, on a

$$M_1O - M_1F = M_2O - M_2F;$$

d'où

$$M_1F - M_2F = M_1O - M_2O;$$

le point F est sur l'hyperbole déjà trouvée.

Si les points M_1 et M_2 sont sur deux branches différentes, on a

$$M_1F - M_1O = M_2O - M_2F;$$

et par suite

$$M_1F + M_2F = M_1O + M_2O;$$

le point F est donc alors sur l'ellipse ayant pour foyers M_1 et M_2 et passant par le point O.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

134. — *On donne dans un plan deux coniques* S, S′ *et deux points* P, Q; *on mène de ces points des tangentes aux deux coniques. Soient* A *et* B *deux des points d'intersection des tangentes à* S *issues de* P *et* Q *(non situés sur une même tangente) et soient* A′ *et* B′ *deux points analogues relatifs à* S′.

1° Il existe une conique Σ *tangente aux droites* AB′, B′B, BA′, A′A *et inscrite dans le quadrilatère formé par les tangentes communes aux coniques* S, S′.

2° Le point P *étant fixe, quel lieu doit décrire le point* Q *pour que la conique* Σ *reste invariable?*

3° Examiner le cas où le point P *est l'un des points communs à* S *et* S′.

Soient
$$au^2 + bv^2 + cw^2 = 0,$$
$$a'u^2 + b'v^2 + c'w^2 = 0$$
les équations des deux coniques S et S′ rapportées à leur triangle autopolaire commun.

Désignons par x_0, y_0, z_0 et x_1, y_1, z_1 les coordonnées des points P et Q.

Les coniques inscrites dans le quadrilatère formé par les tangentes à S issues de P et Q ont pour équation tangentielle
$$(ux_0 + vy_0 + wz_0)(ux_1 + vy_1 + wz_1) + \lambda(au^2 + bv^2 + cw^2) = 0, \qquad (1)$$
on aura l'équation quadratique du système de deux points tels que A et B en remplaçant dans le premier membre de l'équation (1) λ par une racine non nulle de l'équation obtenue en égalant à zéro le discriminant du premier membre de l'équation (1).

Cette équation est la suivante :
$$\begin{vmatrix} x_0x_1 + \lambda a & \frac{1}{2}(x_0y_1 + x_1y_0) & \frac{1}{2}(x_0z_1 + x_1z_0) \\ \frac{1}{2}(y_0x_1 + x_0y_1) & y_0y_1 + \lambda b & \frac{1}{2}(y_0z_1 + y_1z_0) \\ \frac{1}{2}(z_0x_1 + z_1x_0) & \frac{1}{2}(z_0y_1 + z_1y_0) & z_0z_1 + \lambda c \end{vmatrix} = 0.$$

Développant et supprimant la racine $\lambda = 0$ qui donne les points P et Q, on a
$$\lambda^2 + \left(\frac{x_0x_1}{a} + \frac{y_0y_1}{b} + \frac{z_0z_1}{c}\right)\lambda - \frac{1}{4}\left[\left(\frac{x_0^2}{a} + \frac{y_0^2}{b} + \frac{z_0^2}{c}\right)\left(\frac{x_1^2}{a} + \frac{y_1^2}{b} + \frac{z_1^2}{c}\right) - \left(\frac{x_0x_1}{a} + \frac{y_0y_1}{b} + \frac{z_0z_1}{c}\right)\right] = 0.$$

D'une façon générale, si $\omega(x, y, z)$ est le premier membre de l'équation ponctuelle d'une conique, nous désignerons par ω_p le résultat de la substitution à x, y, z des coordonnées d'un point P dans $\omega(x, y, z)$.

De plus, si dans la forme polaire de ω :
$$\frac{1}{2}\left[x_0\frac{\partial\omega}{\partial x} + y_0\frac{\partial\omega}{\partial y} + z_0\frac{\partial\omega}{\partial z}\right],$$
on remplace x, y, z par les coordonnées x_1, y_1, z_1 d'un point Q, nous désignerons le résultat de la substitution par ω_{pq}.

Avec ces notations, l'équation en λ prend la forme
$$\lambda^2 + \omega_{pq}\lambda - \frac{1}{4}\left[\omega_p\omega_q - \omega_{pq}^2\right] = 0. \qquad (\alpha)$$

De même, en remplaçant dans l'équation

$$(ux_0 + vy_0 + wz_0)(ux_1 + vy_1 + wz_1) + \mu(a'u^2 + b'v^2 + c'w^2) = 0 \qquad (2)$$

μ par une racine de l'équation

$$\mu^2 + \omega'_{pq}\mu - \frac{1}{4}[\omega'_p\omega'_q - \omega'^2_{pq}] = 0, \qquad (3)$$

on aura l'équation quadratique du système des points A′ et B′.

Retranchons maintenant les équations (1) et (2) membre à membre, en supposant effectuées les opérations indiquées.

On a $$\lambda(au^2 + bv^2 + cw^2) - \mu(a'u^2 + b'v^2 + c'w^2) = 0;$$

c'est l'équation tangentielle d'une conique Σ inscrite dans le quadrilatère AA′BB′.

La forme même de son équation montre en outre que la conique Σ fait partie du faisceau tangentiel défini par S et S′.

2° Pour que, le point P restant fixe, la conique Σ reste invariable quand le point Q se déplace, il faut et il suffit que le rapport $\frac{\lambda}{\mu}$ soit égal à un nombre donné K.

Analytiquement, ceci revient à écrire que les deux équations

$$K^2\lambda^2 + \omega_{pq}K\lambda - \frac{1}{4}[\omega_p\omega_q - \omega^2_{pq}] = 0.$$

$$\lambda^2 + \omega'_{pq}\lambda - \frac{1}{4}[\omega'_p\omega'_q - \omega'^2_{pq}] = 0$$

ont une racine commune, ce qui donne pour équation du lieu du point Q :

$$[(K\omega'_{pq} - \omega_{pq})^2 - (K^2\omega'_p\omega'_q + \omega_p\omega_q)]^2 - 4K^2\omega_p\omega_q\omega'_p\omega'_q = 0.$$

Équation que l'on peut encore écrire de la manière suivante :

$$[(K\omega'_{pq} - \omega_{pq})^2 - (K^2\omega'_p\omega'_q - \omega_p\omega_q)]^2 - 4(K\omega'_{pq} - \omega_{pq})^2\omega_p\omega_q = 0. \qquad (3)$$

On voit immédiatement, sous cette forme, que c'est l'équation d'une courbe du quatrième degré. Nous remarquerons de plus que le premier membre de cette équation est seulement formé avec des covariants des équations ponctuelles des deux coniques S et S′, ce qui est mis en évidence grâce à notre notation.

Les coordonnées courantes sont ici celles du point Q et on doit laisser invariables celles de P.

Cherchons les points doubles de la quartique proposée. Pour cela, posons

$$\rho = (K\omega'_{pq} - \omega_{pq})^2 - (K^2\omega'_p\omega'_q - \omega_p\omega_q)$$

et désignons par ξ l'une quelconque des trois coordonnées du point Q.

En prenant la dérivée partielle du premier membre de l'équation (3) par rapport à ξ, on a

$$\rho\left[2(K\omega'_{pq}-\omega_{pq})\left(K\frac{\partial\omega'_{pq}}{\partial\xi}-\frac{\partial\omega_{pq}}{\partial\xi}\right)-\left(K^2\frac{\partial\omega'_q}{\partial\xi}\omega'_p-\omega_p\frac{\partial\omega_q}{\partial\xi}\right)\right]-2(K\omega'_{pq}-\omega_{pq})^2\omega_p\frac{\partial\omega_q}{\partial\xi}-4(K\omega'_{pq}-\omega_{pq})\omega_p\omega_q\left(K\frac{\partial\omega'_{pq}}{\partial\xi}-\frac{\partial\omega_{pq}}{\partial\xi}\right). \qquad (4)$$

On voit immédiatement que si l'on fait

$$K\omega'_{pq} - \omega_{pq} = 0$$

et $$K^2\omega'_p\omega'_q - \omega_p\omega_q = 0,$$

l'expression précédente est nulle, quelle que soit la coordonnée courante.

Donc la quartique considérée a déjà pour points doubles les points communs à la droite

$$K\omega'_{pq} - \omega_{pq} = 0$$

et à la conique

$$K^2\omega'_p\omega'_q - \omega_p\omega_q = 0.$$

Remarquons maintenant que lorsque le point Q coïncide avec le point P, on a :

$$\omega_q = \omega_p, \qquad \omega'_q = \omega'_p, \qquad \omega_{pq} = \omega_p, \qquad \omega'_{pq} = \omega'_p$$

et

$$\frac{\partial\omega_{pq}}{\partial\xi} = \frac{1}{2}\frac{\partial\omega_p}{\partial\xi}.$$

Calculons, avec ces hypothèses, la valeur de l'expression (4).

Tout d'abord, on a

$$\rho = -2\,\omega_p(K\omega'_p - \omega_p).$$

L'expression (4) devient donc

$$-2(K\omega'_p - \omega_p)\left[\omega_p(K\omega'_p - \omega_p)\left(K\frac{\partial\omega_p}{\partial\xi} - \frac{\partial\omega_p}{\partial\xi}\right) - K^2\omega_p\omega'_p\frac{\partial\omega'_p}{\partial\xi} + \omega_p^2\frac{\partial\omega_p}{\partial\xi}\right] - 2(K\omega'_p - \omega_p)^2\omega_p\frac{\partial\omega_p}{\partial\xi}$$
$$- 2(K\omega'_p - \omega_p)\omega_p^2\left(K\frac{\partial\omega'_p}{\partial\xi} - \frac{\partial\omega_p}{\partial\xi}\right).$$

Expression identiquement nulle, ce qui montre que le point P est encore un point double de la quartique.

Il résulte de là que cette quartique est unicursale.

Il serait d'ailleurs aisé de la construire avec l'équation (3).

3° Lorsque le point P est un point commun aux deux coniques S et S′, on a

$$\omega_p = \omega'_p = 0.$$

Les équations (α) et (β) deviennent alors

$$\left(\lambda + \frac{1}{2}\omega_{pq}\right)^2 = 0,$$

$$\left(\mu + \frac{1}{2}\omega'_{pq}\right)^2 = 0;$$

on voit alors que le lieu du point Q n'est autre que la droite

$$K\omega'_{pq} - \omega_{pq} = 0,$$

qui passe évidemment par le point P.

Remarques. — En transformant l'énoncé précédent par polaires réciproques, on obtient le théorème suivant :

On donne dans un plan deux coniques S *et* S′ *et deux droites* D *et* E *qui rencontrent ces deux coniques en quatre points, savoir* a, b, c, d *sur l'une et* a′, b′, c′, d′ *sur l'autre; deux cordes* ad *et* bc *sous-tendues par l'angle de ces deux droites dans la première conique rencontrent deux cordes* a′d′ *et* b′c′ *sous-tendues dans la seconde conique en quatre points* m, n, p, q *situés sur une conique appartenant au faisceau ponctuel déterminé par les coniques* S *et* S′.

En faisant une transformation homographique telle que deux des points communs à S et à S′ deviennent les points cycliques, on obtient une proposition bien connue, sur les cercles ayant même axe radical, énoncée par Chasles dans le chapitre XXX de son traité de *Géométrie supérieure*. Nous y renvoyons le lecteur pour la démonstration géométrique de cette proposition.

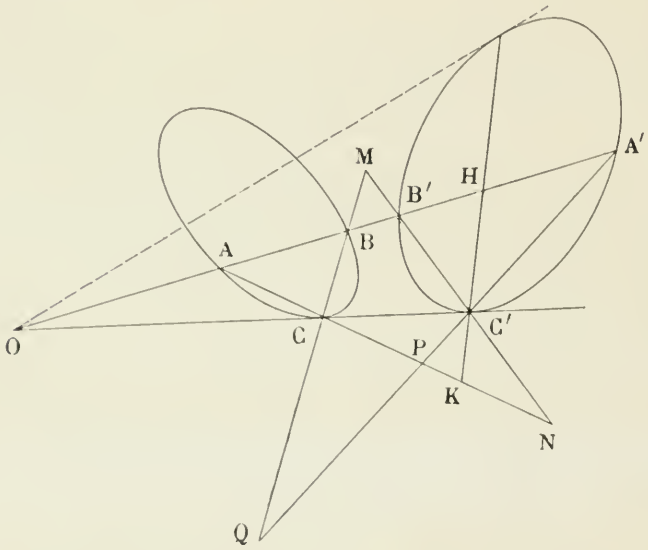
Au cas particulier où l'un des points P et Q est commun aux deux coniques, correspond le cas où l'une des droites est tangente aux deux coniques. Dans ce cas, l'autre droite passe par un point fixe situé sur la première droite, et on a l'énoncé suivant :

On considère deux coniques et une de leurs tangentes communes, et l'on prend les deux points de contact pour sommets de deux angles qui interceptent dans les deux coniques, respectivement deux cordes situées sur

une même transversale; les côtés de ces deux angles se rencontreront en quatre points situés sur une même conique qui passera par les points d'intersection des deux premières. De plus, si la transversale en question tourne autour d'un point fixe de la tangente commune, la troisième conique reste toujours la même.

Dans le cas du cercle, Chasles *(loc. cit.)* a donné une démonstration géométrique de la deuxième partie de cette proposition; nous allons en indiquer une autre qui nous paraît préférable au point de vue projectif.

Soient en effet C et C′ les points de contact des deux coniques avec une tangente commune, et considérons la transversale OABB′A′. Cette transversale donne lieu à quatre points M, N, P, Q et l'on sait qu'il existe une conique Σ du faisceau ponctuel déterminé par S et S′ passant par les quatre points M, N, P, Q. Nous allons démontrer que la polaire du point C par rapport à Σ coïncide avec la polaire du point O par rapport à S′. Soient en effet H et K les points où cette dernière droite rencontre A′B′ et PN. Le faisceau harmonique (C′.OB′HA′) coupé par la transversale PN donne la division harmonique CNKP, où C et K sont conjugués.



On sait de plus que C et C′ sont les points doubles de l'involution déterminée sur CC′ par toutes les coniques du faisceau ponctuel défini par S et S′. Donc si α et β sont les points d'intersection de Σ avec CC′, α et β sont conjugués harmoniques par rapport à C et C′.

Il résulte de là que C′K est la polaire du point C par rapport à Σ. Elle est indépendante de la transversale OAB. De plus, si l'on joint le point C à un des points γ commun à S et S′, le second point d'intersection avec Σ, conjugué harmonique du précédent par rapport à C et au point où la droite Cγ rencontre HK, est fixe. Σ passe donc par cinq points fixes et est fixe elle-même.

On démontrerait de la même façon que la polaire de C′ par rapport à Σ n'est autre que la polaire de O par rapport à S.

A. Maluski.

SOLUTION DE LA QUESTION DE GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

POSÉE AUX CANDIDATS AU CERTIFICAT D'APTITUDE A L'ENSEIGNEMENT SPÉCIAL, 1891, 2e SESSION

(Question 129 page 230)

Cette question a fait l'objet de nombreux articles parus dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques*. Nous allons en indiquer une solution en suivant une méthode donnée par M. Darboux.

Nous supposerons que les cercles considérés, au lieu d'être tangents à la conique S, la rencontrent en deux points fixes A, B (réels ou imaginaires). Pour fixer les idées, supposons que cette conique soit une ellipse et rapportons-la à ses axes: son équation sera

$$f \equiv \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

Soient x_0, y_0 les coordonnées d'un point M du lieu et posons

$$P \equiv \frac{xx^0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} - 1 \cdot$$

Un cercle inscrit dans l'angle formé par les tangentes menées à la conique par ce point M est représenté par une équation de la forme

$$ff_0 - P^2 + (mx + ny + q)^2 = 0, \tag{1}$$

f_0 désignant $\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} - 1$. Soient x_1, y_1 et x_2, y_2 les coordonnées des points A, B. En écrivant que le cercle précédent passe par A et par B, on obtient

$$mx_1 + ny_1 + q = \varepsilon_1 P_1, \quad mx_2 + ny_2 + q = \varepsilon_2 P_2$$

ε_1 et ε_2 étant égaux à ± 1; P_1 et P_2 désignant $\frac{x_1x_0}{a^2} + \frac{y_1y_0}{b^2} - 1$ et $\frac{x_2x_0}{a^2} + \frac{y_2y_0}{b^2} - 1$ respectivement.

Il y a deux cas à distinguer, selon que l'on prendra $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ ou $\varepsilon_1 = -\varepsilon_2$.

Premier cas. — Prenons $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$; avec des signes convenables de m, n, q on peut supposer $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = +1$, de sorte que :

$$mx_1 + ny_1 + q = \frac{x_1x_0}{a^2} + \frac{y_1y_0}{b^2} - 1 \tag{2}$$

$$mx_2 + ny_2 + q = \frac{x_2x_0}{a^2} + \frac{y_2y_0}{b^2} - 1. \tag{3}$$

Écrivons maintenant que l'équation (1) représente un cercle, ce qui fournit les conditions

$$\frac{1}{a^2} f_0 - \frac{x_0^2}{a^4} + m^2 = \frac{1}{b^2} f_0 - \frac{y_0^2}{b^4} + n^2, \tag{4}$$

$$-\frac{x_0y_0}{a^2b^2} + mn = 0. \tag{5}$$

En retranchant membre à membre les équations (2) et (3) et remplaçant x_0 par x, y_0 par y, on obtient

$$m(x_1 - x_2) + n(y_1 - y_2) = (x_1 - x_2)\frac{x}{a^2} + (y_1 - y_2)\frac{y}{b^2}. \tag{6}$$

L'équation (4) simplifiée donne

$$\frac{1}{a^2}\left(\frac{y^2}{b^2} - 1\right) - \frac{1}{b^2}\left(\frac{x^2}{a^2} - 1\right) = n^2 - m^2, \tag{7}$$

et enfin

$$mn = \frac{xy}{a^2b^2}. \tag{8}$$

Nous aurons donc *une première partie* du lieu en éliminant m et n entre les équations (6), (7) et (8).

Pour faire simplement les calculs, posons $m = \lambda \frac{x}{a^2}$; l'équation (8) donne $n = \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{y}{b^2}$ et par suite en portant ces valeurs dans l'équation (6), il vient :

$$(\lambda - 1)\left[(x_1 - x_2)\frac{x}{a^2} - \frac{1}{\lambda}(y_1 - y_2)\frac{y}{b^2}\right] = 0.$$

La solution $\lambda = 1$, donne $m = \frac{x}{a^2}$, $n = \frac{y}{b^2}$ et par suite l'équation (4) donne en remplaçant m par $\frac{x_0}{a^2}$ et p par $\frac{y_0}{b^2}$, $\frac{1}{a^2} f_0 = \frac{1}{b^2} f_0$, c'est-à-dire $f_0 = 0$. On trouve ainsi la conique elle-même. Cette solution doit être rejetée puisque si $f_0 = 0$ l'équation (1) représente deux droites. Nous prendrons par suite

$$\lambda = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \cdot \frac{a^2y}{b^2x},$$

d'où $$m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \cdot \frac{y}{b^2}, \qquad n = \frac{x_1 - x_2}{y_1 - y_2} \cdot \frac{x}{a^2}.$$

Nous obtiendrons l'équation de cette première partie du lieu en portant ces valeurs dans l'équation (7). On voit déjà que le résultat sera indépendant de la position des points A et B, et ne dépendra que de la direction de la droite AB; posons $\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \operatorname{tg} \alpha$, de sorte que

$$m = \frac{y}{b^2} \operatorname{tg} \alpha, \quad n = \frac{x}{a^2} \operatorname{cotg} \alpha;$$

on obtient $$\frac{1}{a^2}\left(\frac{y^2}{b^2} - 1\right) - \frac{1}{b^2}\left(\frac{x^2}{a^2} - 1\right) = \frac{x^2}{a^4} \operatorname{cotg}^2 \alpha - \frac{y^2}{b^4} \operatorname{tg}^2 \alpha$$

ou en simplifiant, $$\frac{x^2}{a^2 \sin^2 \alpha} - \frac{y^2}{b^2 \cos^2 \alpha} = \frac{c^2}{a^2 \sin^2 \alpha + b^2 \cos^2 \alpha},$$

c'est-à-dire une hyperbole homofocale à l'ellipse donnée. Si la conique donnée avait été une hyperbole, on aurait obtenu une ellipse homofocale. On voit que l'équation trouvée ne change pas si l'on change α en $-\alpha$, ce qui s'explique aisément en remarquant que si un cercle coupe une conique en deux points A, B, il la coupe en deux autres points A_1, B_1, tels que les droites AB et A_1B_1 soient également inclinées sur les axes de la conique.

Deuxième cas. — Nous prendrons maintenant $\varepsilon_1 = -\varepsilon_2$, de sorte que

$$mx_1 + ny_1 + q = \frac{x_1x_0}{a^2} + \frac{y_1y_0}{b^2} - 1,$$

$$mx_2 + ny_2 + q = -\frac{x_2x_0}{a^2} - \frac{y_2y_0}{b^2} + 1.$$

En éliminant q on obtient donc, en écrivant x et y au lieu de x_0 et y_0,

$$m(x_1 - x_2) + n(y_1 - y_2) = \frac{x}{a^2}(x_1 + x_2) + \frac{y}{b^2}(y_1 + y_2) - 2. \tag{6}$$

On aura la deuxième partie du lieu en éliminant m et n entre les équations (6)', (7), (8). En faisant le calcul qui n'offre d'ailleurs aucune difficulté, on trouve une courbe du quatrième degré. Dans le cas particulier proposé aux candidats au certificat d'aptitude, les cercles étaient tangents à la conique; on devait donc supposer $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$ et par suite l'équation (6)' se réduit à

$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} - 1 = 0,$$

ce qui donne *une* droite, qui n'est autre que la tangente à l'ellipse.

Supposons maintenant que la conique donnée soit une parabole. Nous poserons

$$f \equiv y^2 - 2px, \qquad \mathrm{P} \equiv yy_0 - p(x + x_0),$$

et nous considèrerons comme plus haut l'équation

$$ff_0 - \mathrm{P}^2 + (mx + ny + q)^2 = 0. \tag{1}$$

En écrivant que la courbe représentée par cette équation passe par les points x_1, y_1, et x_2, y_2, nous aurons les deux hypothèses

$$\left.\begin{aligned} mx_1 + ny_1 + q &= y_1y_0 - p(x_1 + x_0) \\ mx_2 + ny_2 + q &= y_2y_0 - p(x_2 + x_0) \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

ou $$\left.\begin{aligned} mx_1 + ny_1 + q &= y_1y_0 - p(x_1 + x_0) \\ mx_2 + ny_2 + q &= -y_2y_0 + p(x_2 + x_0) \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Écrivant que (1) représente un cercle, nous obtenons

$$-p^2 + m^2 = -2px_0 + n^2 \quad \text{et} \quad py_0 + mn = 0.$$

Il nous reste, en adoptant d'abord les équations (9) à éliminer m et n entre les équations

$$m(x_1 - x_2) + n(y_1 - y_2) = y(y_1 - y_2) - p(x_1 - x_2),$$
$$2px - p^2 + m^2 - n^2 = 0, \qquad py + mn = 0.$$

En procédant comme plus haut, nous posons $m = -\lambda p$, $n = +\frac{1}{\lambda} y$, d'où l'on déduit

$$(\lambda - 1)p[(x_1 - x_2) + \frac{y}{\lambda}(y_1 - y_2)] = 0.$$

Rejetant la solution $\lambda = 1$, qui donne la parabole proposée comme solution étrangère, nous prenons

$$\lambda = -\frac{y}{p} \cdot \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2},$$

et par suite
$$m = y\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}, \qquad n = -p.\frac{x_1 - x_2}{y_1 - y_2},$$

ou, en posant
$$\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \operatorname{tg} \alpha :$$

$$m = y \operatorname{tg} \alpha, \qquad n = -p \operatorname{cotg} \alpha.$$

L'équation correspondante du lieu est donc

$$y^2 \operatorname{tg}^2 \alpha + 2px - \frac{p^2}{\sin \alpha} = 0.$$

En transportant l'origine au foyer de la parabole donnée, l'équation précédente devient

$$y^2 \operatorname{tg}^2 \alpha + 2px - p^2 \operatorname{cotg}^2 \alpha = 0$$

ou
$$(x^2 + y^2) \operatorname{tg}^2 \alpha = (x \operatorname{tg} \alpha - p \operatorname{cotg} \alpha)^2 ;$$

la parabole trouvée est donc homofocale à la proposée.

En second lieu, si nous prenons les équations (10), nous obtenons en éliminant q, l'équation

$$m(x_1 - x_2) + n(y_1 - y_2) = y_0(y_1 + y_2) - p(x_1 + x_2) - 2px_0 ;$$

en supposant la droite AB tangente à la parabole, c'est-à-dire en supposant $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$, cette relation devient

$$y_0 y_1 - p(x_0 + x_1) = 0,$$

et comme dans le cas de la conique à centre on trouve *une droite :* la tangente en A à la parabole.

En résumé, en faisant abstraction des droites, on trouve bien, dans le cas particulier proposé, pour lieu demandé une conique homofocale à la proposée ; donc, comme on le sait, les points d'intersection de la conique proposée et de la conique obtenue sont sur un cercle ; à moins toutefois que la conique proposée ne soit une parabole, car dans ce cas la seconde parabole ayant même axe que la première, deux des quatre points qui leur sont communs sont rejetés à l'infini et le cercle se réduit à deux droites dont l'une rejetée à l'infini. La condition pour que les points communs aux deux coniques soient sur un cercle véritable est que la conique donnée soit une conique à centre.

Autre solution. — Prenons pour axe des x la tangente à la conique donnée, et pour axe des y la normale au point de contact. L'équation tangentielle de la conique donnée est de la forme

$$au^2 + a''w^2 + 2hvw + 2b'wu = 0.$$

L'équation tangentielle d'un cercle tangent à l'origine à l'axe des x est, h désignant un paramètre variable,

$$h^2(u^2 + v^2) - (vh + w)^2 = 0$$

ou
$$h^2u^2 - w^2 - 2hvw = 0.$$

L'expression $$(a + \lambda h^2)u^2 + (a'' - \lambda)w^2 + 2(b - \lambda h)vw + 2b'wu$$
sera un produit de deux facteurs si λ est racine de l'équation

$$\begin{vmatrix} a + \lambda h^2 & 0 & b' \\ 0 & 0 & b - \lambda h \\ b' & b - \lambda h & a'' - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

ou, en développant, $$(b - \lambda h)^2(a + \lambda h^2) = 0.$$

La solution $\lambda = \dfrac{b}{h}$ donne $$(a + bh)u^2 + \left(a'' - \frac{b}{h}\right)w^2 + 2b'wu = 0.$$

Pour chaque valeur de h, cette équation représente deux points de l'axe des x; on a donc une première partie du lieu formé par l'axe des x.

Si l'on pose $\lambda = -\dfrac{a}{h^2}$ on obtient

$$\left(a'' + \frac{a}{h^2}\right)w^2 + 2\left(b + \frac{a}{h}\right)vw + 2b'wu = 0.$$

Cette équation se décompose en deux autres. La solution $w = 0$ donne l'origine, qui est évidemment un ombilic du système proposé; en supprimant cette solution, il reste

$$2b'u + 2\left(b + \frac{a}{h}\right)v + \left(a'' + \frac{a}{h^2}\right)w = 0.$$

Cette équation détermine les coordonnées d'un ombilic :

$$\frac{x}{2b'} = \frac{y}{2\left(b + \dfrac{a}{h}\right)} = \frac{z}{a'' + \dfrac{a}{h^2}};$$

on en déduit $$\frac{a}{h} = b'\frac{y}{x} - b; \qquad \frac{a}{h^2} = 2b'\frac{z}{x} - a'',$$

et en éliminant h on obtient $$(b'y - bx)^2 = ax(2b'z - a''x).$$

Cette équation représente une conique normale à la proposée, à l'origine.

On trouve aisément l'équation tangentielle de cette conique en écrivant que l'équation en h :

$$(2b'u + 2bv + a''w)h^2 + 2ahv + aw = 0,$$

a une racine double, ce qui donne

$$a''w^2 + 2bvw + 2b'uw - av^2 = 0,$$

équation qu'on peut écrire $$au^2 + a''w^2 + 2bvw + 2b'wu - a(u^2 + v^2) = 0;$$
la conique trouvée est donc homofocale à la proposée.

Remarque. — M. J. Hais (lycée Hoche), qui nous a envoyé une solution analogue à la précédente, fait remarquer que ce problème est un cas particulier du problème 67 résolu dans le numéro d'octobre 1891 de la *Revue de Mathématiques spéciales*, dont voici l'énoncé : *On considère une ellipse* E *et un point* P *dans son plan. Trouver le lieu du point* M *tel que les tangentes, menées du point* M *et du point* P *à l'ellipse* E *forment un quadrilatère circonscriptible à un cercle.*

Si le point P est sur la conique, on obtient le problème dont nous nous occupons. Dans le cas général, on a trouvé deux coniques homofocales à la conique donnée; quand le point P vient sur l'ellipse, l'une de ces coniques se confond avec l'ellipse elle-même.

M. A. Marmion (lycée de Moulins) a traité, par l'homologie, le cas plus général où l'on considère une conique fixe S et une conique mobile Σ passant par quatre points fixes A, B, C, D, les deux premiers étant supposés sur la conique S. Mais sa solution est incomplète et ne donne qu'une partie du lieu.

M. Darboux a donné dans les *Nouvelles Annales* l'équation du lieu dans le cas tout à fait général où les quatre points A, B, C, D sont quelconques. Voici sa solution.

Soient $f = 0$ l'équation de la conique fixe S; soient x_0, y_0 les coordonnées d'un point M; l'équation du faisceau des tangentes à f issues de M est

$$ff_0 - P^2 = 0,$$

en posant
$$2P = x_0 \frac{\partial f}{\partial x} + y_0 \frac{\partial f}{\partial y} + z_0 \frac{\partial f}{\partial z}.$$

L'équation d'une conique bitangente au système formé par ces deux tangentes est

$$ff_0 - P^2 + Q^2 = 0,$$

en posant
$$Q \equiv mx + ny + p.$$

Nous devons exprimer que la conique représentée par l'équation précédente passe par les quatre points (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4), ce qui donne

$$\begin{aligned} mx_1 + ny_1 + p &= \sqrt{P_1^2 - f_1 f_0}, \\ mx_2 + ny_2 + p &= \sqrt{P_2^2 - f_2 f_0}, \\ mx_3 + ny_3 + p &= \sqrt{P_3^2 - f_3 f_0}, \\ mx_4 + ny_4 + p &= \sqrt{P_4^2 - f_4 f_0}. \end{aligned}$$

L'équation du lieu est donc, en écrivant x et y au lieu de x_0 et y_0,

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 & \sqrt{P_1^2 - f_1 f_0} \\ x_2 & y_2 & 1 & \sqrt{P_2^2 - f f_2} \\ x_3 & y_3 & 1 & \sqrt{P_3^2 - f f_3} \\ x_4 & y_4 & 1 & \sqrt{P_4^2 - f f_4} \end{vmatrix} = 0.$$

CONCOURS DE 1892 *(suite)*.

ÉCOLE CENTRALE

Première session

Géométrie analytique.

185. — On donne dans un plan deux axes rectangulaires, Ox, Oy et une droite D dont l'équation est $Ax + By + C = 0$; sur cette droite on prend un point quelconque M, de coordonnées a, b, et à ce point on fait correspondre les deux paraboles qui ont toutes deux le point O pour foyer, et, l'une la droite $x - a = 0$, l'autre la droite $y - b = 0$ pour directrice.

1° Démontrer que ces deux paraboles ont, en général, deux points communs réels et deux points communs imaginaires, et former, selon la position du point M sur la droite D, l'équation de la droite qui passe par les deux points réels communs aux deux paraboles.

2° Trouver le lieu des points communs aux deux paraboles que l'on fait ainsi correspondre à un point M, quand ce point M parcourt la droite D. Ce lieu se compose, en général, d'une ellipse et d'une hyperbole; distinguer sur la droite D la partie que parcourt le point M quand les points communs aux deux paraboles sont sur l'ellipse, de celles qu'il parcourt quand ces points sont sur l'hyperbole.

3° Vérifier analytiquement et expliquer géométriquement les faits suivants. Soit P le point de rencontre de la droite D avec l'un des axes, et soient, sur l'autre axe, de part et d'autre du point O, les points P′ et P″ tels que l'on ait OP′ = OP″ = OP. L'une des deux coniques du lieu passe par P′ et l'autre par P″, et les tangentes au lieu, au point P′ et au point P″, sont les droites PP′, PP″.

Construire le lieu en supposant que l'équation de la droite D est

$$x + 2y - 2 = 0.$$

4° Le lieu demandé est, en général, composé d'une véritable ellipse et d'une véritable hyperbole; trouver les divers cas particuliers pour lesquels il en est autrement, et, dans chacun de ces cas, reconnaître ce que deviennent les deux coniques du lieu.

(25 juillet, de 7 h. à 11 h.)

Calcul trigonométrique.

Résoudre un triangle rectangle connaissant sa surface $875617^{mq}5$ et celle du cercle circonscrit $3356732^{mq}3$.

(25 juillet, de 2 h. 1/2 à 4 h.)

Physique et Chimie.

I. — Evaluer la pression vraie réduite à zéro à l'aide d'un baromètre à vide imparfait.

Nous supposerons faites deux lectures pendant lesquelles la pression atmosphérique x seule n'ayant pas changé, toutes les autres conditions au contraire auront été modifiées.

Nous nommerons :

Pour les premières observations, faites à t degrés, H, la hauteur de la colonne de mercure, lue sur une règle de laiton, et C la capacité de la chambre;

Pour les deuxièmes observations, faites à t_1 degrés, H_1 et C_1 les quantités analogues;

l, le coefficient de dilatation linéaire du laiton;

m, le coefficient de dilatation du mercure;

α, le coefficient de dilatation cubique des gaz.

Exemple numérique :

$$H = 75^{cm}20 \qquad t = 10 \qquad \frac{C}{C_1} = \frac{1}{2}$$
$$H_1 = 75^{cm}65 \qquad t_1 = 12$$
$$l = 0{,}000019$$
$$m = 0{,}000182$$
$$\alpha = 0{,}00367.$$

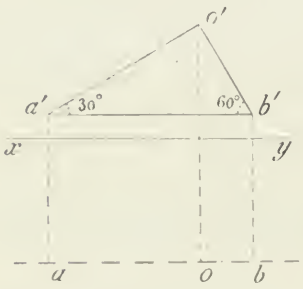
II. — Décrire les préparations dans lesquelles on fait usage de l'acide sulfurique (L'emploi simultané des deux notations est exigé pour l'écriture des formules.)

III. — Analyse, composition et formule du gaz des marais.

(26 juillet, de 7 h. à 10 h.)

Géométrie descriptive.

186. — Dans un plan de front, dont la trace horizontale aob est à 0^m128 en avant de la ligne de terre, on donne un triangle rectangle dont l'hypoténuse $a'b'$ est horizontale et à 0^m01 au-dessus de la ligne de terre, son extrémité gauche a' étant à 0^m038 du côté gauche du cadre et son extrémité b' étant à 0^m17 du même côté du cadre. L'angle en a' est de 30°.



On fait tourner ce triangle successivement autour de chacun des côtés de l'angle droit, de manière à engendrer deux cônes, et l'on demande de représenter par ses deux projections le corps solide formé par l'ensemble de ces deux cônes supposés pleins et limités chacun à son sommet et à sa base.

On indiquera à l'encre rouge les constructions employées pour déterminer : 1° un point quelconque de chacune des bases et les tangentes en ces points; 2° un point quelconque de l'intersection des deux cônes et la tangente en ce point.

On n'indiquera pas d'autre construction.

On pourra, à l'aide d'encre de couleur, tracer un certain nombre de génératrices de chacun des cônes; les génératrices vues en trait plein, les génératrices cachées en trait discontinu.

Une légende sur une feuille à part explique succinctement les tracés faits sur l'épure.

Titre extérieur : Intersection de surfaces. — *Titre intérieur :* Assemblage de deux cones.

Les titres, en lettres dessinées, sont de rigueur. — Le cadre a $0^m,45$ sur $0^m,27$; la ligne de terre est parallèle aux petits côtés du cadre à $0^m,19$ du petit côté supérieur.

(27 juillet, de 7 h. à 11 h.)

ERRATUM

Question 176 (page 348, n° 10, 2e année) :

Au lieu de : leurs pôles par rapport aux trois surfaces soient dans un même plan. — *Lire :* soient en ligne droite.

Le Rédacteur-Gérant : H. VUIBERT.

Paris. — Imprimerie Chaix. — 17150-7-92. — (Encre Lorilleux.)

2e Année. N° 12. Septembre 1892.

REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Questions d'examen *(suite)*.

187. — *On donne les équations d'une droite* D *(axes rectangulaires)*

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

et les coordonnées x, y, z *d'un point* M; *trouver les coordonnées* x', y', z' *du point* M' *où vient se placer le point* M *après avoir tourné d'un angle* 0 *autour de la droite* D.

La droite MM' est perpendiculaire à la droite D, donc

$$(x' - x)a + (y' - y)b + (z' - z)c = 0. \qquad (1)$$

La distance du point M au point (x_0, y_0, z_0) reste constante, par suite

$$(x' - x_0)^2 + (y' - y_0)^2 + (z' - z_0)^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2. \qquad (2)$$

Pour plus de simplicité, nous poserons

$$x - x_0 = X, \qquad y - y_0 = Y, \qquad z - z_0 = Z,$$
$$x' - x_0 = X', \qquad y' - y_0 = Y', \qquad z' - z_0 = Z'.$$

Les équations (1) et (2) peuvent s'écrire ainsi :

$$(X' - X)a + (Y' - Y)b + (Z' - Z)c = 0,$$
$$(X' - X)(X' + X) + (Y' - Y)(Y' + Y) + (Z' - Z)(Z' + Z) = 0,$$

d'où l'on tire,

$$\frac{X' - X}{b(Z' + Z) - c(Y' + Y)} = \frac{Y' - Y}{c(X' + X) - a(Z' + Z)} = \frac{Z' - Z}{a(Y' + Y) - b(X' + X)}. \qquad (3)$$

On obtient un rapport égal aux précédents en divisant la racine carrée de la somme des numérateurs par la racine carrée de la somme des dénominateurs; ce qui donne, en supposant que a, b, c soient les cosinus directeurs de la droite D, le rapport égal

$$\varepsilon \frac{MM'}{2.PQ},$$

ε désignant ± 1, et PQ la distance du milieu de MM' à la droite D; or on a $\frac{MM'}{2} = PQ \operatorname{tg} \frac{1}{2} 0$; donc la valeur des rapports (3) est égale à $\varepsilon \operatorname{tg} \frac{1}{2} 0$.

On a donc

$$\left.\begin{aligned} X' - X &= \varepsilon \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} 0 \,[b(Z' + Z) - c(Y' + Y)] \\ Y' - Y &= \varepsilon \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} 0 \,[c(X' + X) - a(Z' + Z)] \\ Z' - Z &= \varepsilon \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} 0 \,[a(Y' + Y) - b(X' + X)] \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Ces équations déterminent X′, Y′, Z′ et par suite x', y', z'. Le déterminant du système est égal à $1 + \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}\theta$, et par suite il est différent de zéro; on pourra donc appliquer les formules de Cramer. On peut remarquer que X′, Y′, Z′ s'exprimeront en fonction linéaire et homogène de X, Y, Z.

On trouve, en faisant les calculs

$$X' = a(aX + bY + cZ) + [X - a(aX + bY + cZ)] \cos\theta + \varepsilon(bZ - cY)\sin\theta$$

et des formules analogues pour Y′ et Z′, de sorte qu'en posant

$$aX + bY + cZ = P,$$

on a finalement

$$\left.\begin{aligned} X' &= aP + (X - aP)\cos\theta + \varepsilon(bZ - cY)\sin\theta \\ Y' &= bP + (Y - bP)\cos\theta + \varepsilon(cX - aZ)\sin\theta \\ Z' &= cP + (Z - cP)\cos\theta + \varepsilon(aY - bX)\sin\theta \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Il reste à déterminer le signe que l'on doit attribuer à ε quand on veut que la rotation se fasse dans un sens déterminé. Supposons les axes définis de façon qu'un observateur placé sur Oz les pieds en O, la tête en un point pris sur la direction positive Oz et regardant Ox et Oy, voie Ox à sa gauche, Oy à sa droite et que la rotation autour de la droite D s'effectue de façon qu'un observateur placé sur la droite D de façon que la direction allant de ses pieds à sa tête ait pour cosinus directeurs a, b, c, voie cette rotation s'effectuer de gauche à droite; je remarque que si l'on fait tourner la droite autour du point x_0, y_0, z_0 d'une manière continue jusqu'à ce qu'elle devienne parallèle à Oz, le point M restant lié invariablement à cette droite, les coordonnées x, y, z varieront d'une manière continue et il en sera évidemment de même de x', y', z'; donc la détermination de ε ne changera pas. Dans ce cas particulier il est facile d'obtenir les formules demandées, car on se trouve ramené à un problème de géométrie plane; on peut remarquer que z reste constant et que

$$X' + iY' = (X + iY)(\cos\theta + i\sin\theta),$$

ce qui donne

$$\left.\begin{aligned} X' &= X\cos\theta - Y\sin\theta, \\ Y' &= X\sin\theta + Y\cos\theta. \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

Or les formules (4) nous donnent dans ce cas particulier

$$X' - X = -\varepsilon \operatorname{tg}\frac{1}{2}\theta\,(Y' + Y)$$

$$Y' - Y = \varepsilon \operatorname{tg}\frac{1}{2}\theta\,(X' + X),$$

d'où l'on tire

$$X'\cos\frac{1}{2}\theta + \varepsilon Y'\sin\frac{1}{2}\theta = X\cos\frac{1}{2}\theta - \varepsilon Y\sin\frac{1}{2}\theta,$$

$$-\varepsilon X'\sin\frac{1}{2}\theta + Y'\cos\frac{1}{2}\theta = \varepsilon X\sin\frac{1}{2}\theta + Y\cos\frac{1}{2}\theta,$$

et par suite

$$\left.\begin{aligned} X' &= X\cos\theta - \varepsilon Y\sin\theta, \\ Y' &= X\varepsilon\sin\theta + Y\cos\theta. \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

La comparaison des formules (6) et (7) montre que l'on doit prendre $\varepsilon = +1$. Quand la rotation se fera de droite à gauche, il faudra au contraire prendre $\varepsilon = -1$.

On peut supprimer le facteur ε dans les formules (5) et regarder θ comme positif dans le premier cas et comme négatif dans le second.

Cas particulier. — Il convient d'examiner le cas où la rotation est de 180°; alors $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\theta$ est infini et comme les différences $X' - X$, $Y' - Y$, $Z' - Z$ sont finies, on doit avoir

$$\frac{X' + X}{a} = \frac{Y' + Y}{b} = \frac{Z' + Z}{c},$$

ce qui exprime que le milieu de MM' est sur la droite D, car ces équations peuvent s'écrire ainsi :

$$\frac{x + x' - 2x_0}{a} = \frac{y + y' - 2y_0}{b} = \frac{z + z' - 2z_0}{c}.$$

En tenant compte de l'équation (1), on obtient, en ajoutant ces rapports terme à terme, après avoir multiplié les deux termes de chacun d'eux par a, b, c respectivement, le rapport suivant, égal aux précédents :

$$2[a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0)];$$

on a, en désignant par H cette expression

$$x' = 2x_0 - x + a\mathrm{H},$$
$$y' = 2y_0 - y + b\mathrm{H},$$
$$z' = 2z_0 - z + c\mathrm{H}.$$

On aurait pu obtenir ces équations de la manière suivante. Le plan perpendiculaire à la droite P, mené par le point M, a pour équation

$$a(\xi - x) + b(\eta - y) + c(\zeta - z) = 0.$$

Cherchons en quel point il coupe la droite D ; pour cela posons

$$\xi = x_0 + a\lambda, \qquad \eta = y_0 + b\lambda, \qquad \zeta = z_0 + c\lambda,$$

ce qui donne $$a(x_0 - x) + b(y_0 - y) + c(z_0 - z) + \lambda = 0,$$

ou $$\lambda = \frac{1}{2}\mathrm{H},$$

et par suite $$\xi = x_0 + \frac{1}{2}a\mathrm{H}, \qquad \eta = y_0 + \frac{1}{2}b\mathrm{H}, \qquad \zeta = z_0 + \frac{1}{2}c\mathrm{H}.$$

Or, on a évidemment $$x' + x = 2\xi = 2x_0 + a\mathrm{H},$$

ce qui donne $$x' = 2x_0 - x - a\mathrm{H}$$

et de même $$y' = 2y_0 - y - b\mathrm{H},$$
$$z' = 2z_0 - z - c\mathrm{H}\ (*).$$

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

146-147. — *Étant donné un cercle* C, *on décrit d'un point* P *comme centre un cercle* C' *de rayon donné. En supposant que le point* P *se meuve sur un diamètre donné* D *du cercle* C, *trouver le lieu du point de rencontre des tangentes menées au cercle* C *par les points où il rencontre le cercle* C', *avec les tangentes au cercle* C', *qui sont perpendiculaires au diamètre* D,

Même question en supposant le point P *fixe et le rayon du cercle* C' *variable.*

Prenons pour axes le diamètre D et le diamètre perpendiculaire du cercle C.

(*) Voir une autre solution du problème dans le *Cours de mécanique* de M. Ch. Brisse, page 33.

Soient
$$x^2 + y^2 - R^2 = 0, \tag{C}$$
$$(x - a)^2 + y^2 - r^2 = 0 \tag{C'}$$
les équations des cercles C et C'.

Désignons par $R\cos\varphi$, $R\sin\varphi$ les coordonnées d'un point commun aux deux cercles; en écrivant que ce point est sur le cercle C', on obtient
$$R^2 - 2aR\cos\varphi + a^2 - r^2 = 0. \tag{1}$$
La tangente en ce point au cercle C a pour équation
$$x\cos\varphi + y\sin\varphi - R = 0, \tag{2}$$
et les tangentes au cercle C' aux extrémités du diamètre D sont représentées par
$$x = a + \varepsilon r, \tag{3}$$
où l'on suppose
$$\varepsilon = \pm 1.$$

On aura le premier lieu demandé en éliminant φ et a entre les trois équations (1), (2) et (3). On aura le deuxième en éliminant φ et r entre ces mêmes équations.

Occupons-nous d'abord du premier lieu; de (3), on tire
$$a = x - \varepsilon r;$$
en remplaçant dans (1), on obtient
$$\cos\varphi = \frac{x^2 - 2\varepsilon rx + R^2}{2R(x - \varepsilon r)}.$$

De la relation (2) on déduit $\sin\varphi$ et en écrivant que la somme des carrés du sinus et du cosinus est égale à l'unité, il vient
$$\frac{(x^2 - 2\varepsilon rx + R^2)^2}{4R^2(x - \varepsilon r)^2} + \frac{[2R^2(x - \varepsilon r) - x(x^2 - 2\varepsilon rx + R^2)]^2}{4R^2y^2(x - \varepsilon r)^2} = 1.$$

En donnant à ε les valeurs $+1$ et -1, on voit immédiatement qu'on obtient les équations de deux courbes symétriques par rapport à Oy; il suffira de construire l'une d'elles; nous ferons par exemple
$$\varepsilon = 1.$$
L'équation peut alors s'écrire
$$y^2[4R^2(x - r)^2 - (x^2 - 2rx + R^2)^2] = [2R^2(x - r) - x(x^2 - 2rx + R^2)]^2$$
ou encore
$$y^2(x^2 - R^2)[R^2 - (x - 2r)^2] = (x^2 - R^2)^2(x - 2r)^2.$$

Supprimons le facteur $x^2 - R^2$, qui correspond au cas où les deux cercles sont tangents; on obtient en définitive pour équation du lieu
$$y^2 = \frac{(x^2 - R^2)(x - 2r)^2}{R^2 - (x - 2r)^2}. \tag{4}$$

Pour obtenir le deuxième lieu, on éliminera r et φ entre les équations (1), (2) et (3) en suivant absolument la même marche; on obtient
$$y^2 = \frac{(x^2 - R^2)(x - 2a)^2}{R^2 - (x - 2a)^2}.$$

C'est la même équation que la précédente où r est changé en a.

Tout revient donc à construire la courbe représentée par l'équation (4). Il est avantageux de transporter l'origine au point $x = 2r$, $y = 0$, qui est un point double. L'équation devient
$$y^2 = \frac{[(x + 2r)^2 - R^2]x^2}{R^2 - x^2}.$$

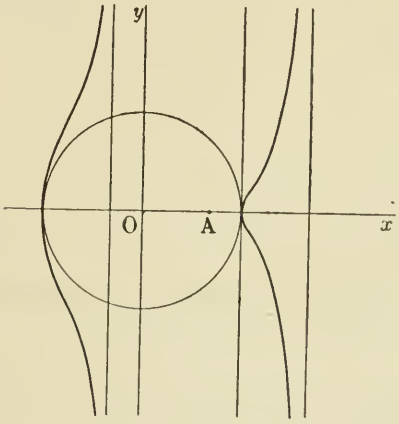
Elle représente une quartique circulaire qui a un point double à l'origine.

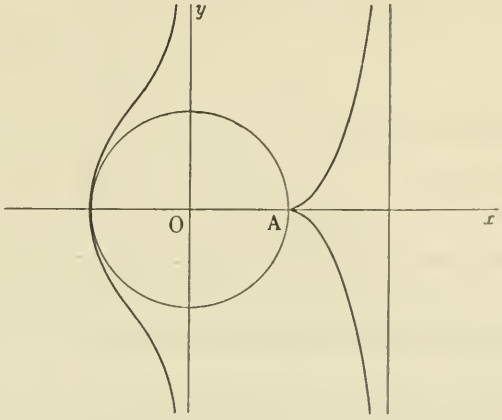
Pour la construire, il importe de ranger par ordre de grandeur les valeurs remarquables de x, qui sont 0, $\pm R$ et $\pm R - 2r$.

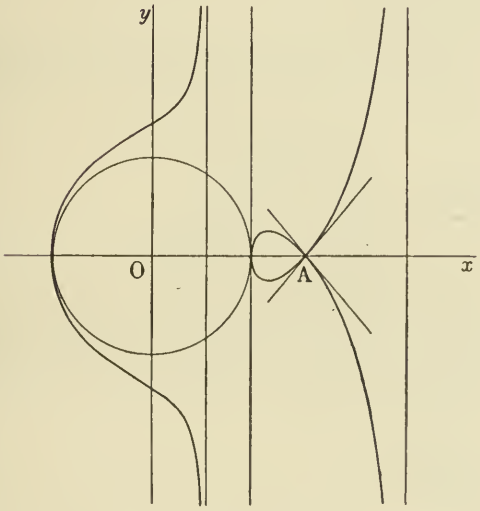
Différents cas sont à distinguer.

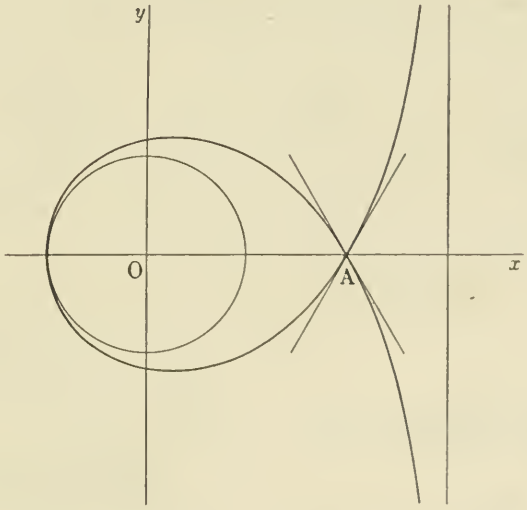
I. $0 < r < \frac{R}{2}$.

On a la suite $-\infty \quad -(R+2r) \quad -R \quad 0 \quad R-2r \quad +R \quad +\infty$

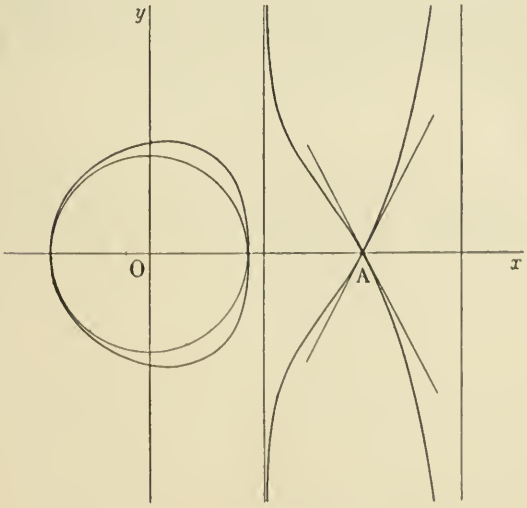








Comme y^2 doit être positif, x ne peut varier qu'entre $-(R+2r)$ et $-R$, et entre $R-2r$ et R. Le point double A est isolé.



II. $r = \frac{R}{2}$.

Le point A est alors un point de rebroussement, l'équation de la courbe s'écrit

$$y^2 = \frac{x^3(x+2R)}{R^2 - x^2}.$$

$-\infty \quad -2R \quad -R \quad 0 \quad +R \quad +\infty$

x varie entre $-2R$ et $-R$, et entre 0 et R.

III. $\frac{R}{2} < r < R$.

L'ordre de grandeur est alors

$-\infty \quad -(R+2r) \quad -R \quad R-2r \quad 0 \quad +R \quad +\infty$

x varie entre $-(R+2r)$ et $-R$ et entre $R-2r$ et $+R$.

IV. $r = R$.

La courbe s'abaisse au troisième degré

$$y^2 = \frac{x^2(x + 3R)}{R - x}$$

$$-\infty \qquad -3R \qquad 0 \qquad R \qquad +\infty$$

x varie entre -3 R et R.

V. $r > R$

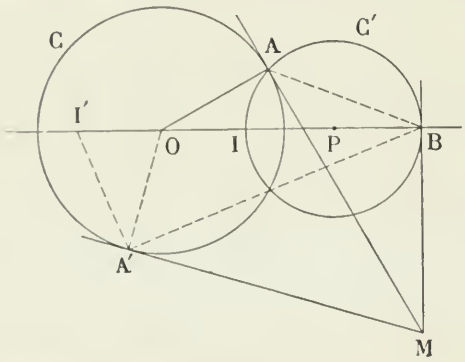
$$-\infty \qquad -(R + 2r) \qquad R - 2r \qquad -R \qquad 0 \qquad +R \qquad +\infty.$$

x varie entre $-(R + 2r)$ et $R - 2r$, et entre $-R$ et $+R$.

Charles Turchi, université de Ferrare (Italie)

Ont résolu la même question : MM. E.-N. Barisien, Bourrienne, à Rouen ; F. Faure ; Henri Pellissier, à Lyon ; L. Perrée, Condorcet.

M. L. Boé, à Tarbes, obtient l'équation du lieu par des considérations géométriques fort simples, qui permettent d'expliquer pourquoi les deux lieux sont analogues.



Soit M un point du lieu; les deux triangles OAI et MAB sont semblables comme ayant leurs côtés perpendiculaires;

donc $$\frac{MB}{MA} = \frac{OI}{OA}.$$

Si l'on suppose le rayon constant,

$$\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 - R^2}} = \frac{x - 2r}{R}.$$

Si au contraire le rayon est variable et OP constant, on remarque que $OP = \frac{OI + OB}{2}$, d'où $OI = 2a - x$, et par suite l'équation devient

$$\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 - R^2}} = \frac{2a - x}{R}.$$

De plus, il est aisé de voir que le point M de notre figure peut être obtenu à l'aide d'un cercle de rayon OP et dont le centre est à une distance du point O égale à PB. Menons du point M la deuxième tangente MA′ au cercle O; puis par le point A′ menons A′I′ perpendiculaire à A′B. On a comme plus haut, en considérant les triangles OA′I′ et MA′B,

$$\frac{MB}{MA'} = \frac{OI'}{OA'}.$$

En comparant avec la relation précédente, on voit que $OI = OI'$. Le rayon du cercle décrit sur BI′ comme diamètre est donc $\frac{OB + OI}{2} = OP$, et la distance de son centre au point O est OB diminué du rayon, c'est-à-dire PB.

---

151. — *On considère les coniques* C *suivant lesquelles un plan* P *coupe un système de surfaces homofocales.*

Trouver le lieu des centres, le lieu des foyers, l'enveloppe des axes des coniques C.

On sait qu'il existe une surface S appartenant à un système de quadriques homofocales, qui est tangente à un plan donné P *. Désignons par O le point de contact du plan P avec cette quadrique particulière et soient OA, OB les deux droites suivant lesquelles le plan P coupe la quadrique S. Nous prendrons pour axes la normale OZ au plan P et les bissectrices OX, OY de l'angle AOB.

Soient $$y - mx = 0, \quad y + mx = 0$$

les équations des droites OA, OB. On trouve aisément l'équation tangentielle de S :

$$f(u, v, w, t) \equiv A(u^2 - m^2v^2) + 2Cut + 2C'vt + 2C''wt + Dt^2 = 0.$$

L'équation générale des surfaces homofocales sera

$$f(u, v, w, t) + \lambda(u^2 + v^2 + w^2) = 0.$$

Cherchons l'équation générale des coniques C. Pour cela, rappelons que si $u_1x + v_1y + w_1z - t_1 = 0$ est l'équation d'un plan, et $f(u, v, w, t) = 0$ l'équation tangentielle d'une quadrique, l'équation de la conique suivant laquelle ce plan coupe cette quadrique est

$$4f(u, v, w, t)f(u_1, v_1, w_1, t_1) - (uf'_{u_1} + vf'_{v_1} + wf'_{w_1} + tf'_{t_1})^2 = 0,$$

comme on le voit immédiatement en transformant, par polaires réciproques, la quadrique directrice ayant pour équation $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$.

Dans le cas que nous considérons, le plan P a pour coordonnées $u_1 = 0, v_1 = 0, t_1 = 0$; donc l'équation des coniques C sera, après quelques simplifications,

$$\varphi(u, v, t) \equiv \lambda[A(u^2 - m^2v^2) + 2Cut + 2C'vt + Dt^2 + \lambda(u^2 + v^2)] - C''^2t^2 = 0.$$

1° Lieu des centres de ces coniques.

L'équation tangentielle du centre est $\varphi'_t = 0$,

c'est-à-dire $$\lambda(Cu + C'v + Dt) - C''^2t = 0,$$

Les coordonnées ponctuelles du centre sont donc

$$x = \frac{\lambda C}{C''^2 - \lambda D}, \qquad y = \frac{\lambda C'}{C''^2 - \lambda D};$$

par suite, le lieu du centre est la droite définie par l'équation

$$Cy - C'x = 0.$$

Ce résultat peut être démontré géométriquement; en effet, le centre d'une conique C est sur le diamètre qui passe par le pôle du plan P par rapport à la surface qui correspond à la conique considérée; or le pôle du plan P décrit la normale OZ au plan P, donc le centre est sur la droite commune au plan P et au plan défini par le centre des surfaces homofocales données et la droite OZ.

2° Lieu des foyers.

Soit $ux + vy - t = 0$ l'équation tangentielle d'un foyer; nous aurons les coordonnées ponctuelles x, y en exprimant que les tangentes issues de ce point ont pour coefficients angulaires i et $-i$.

Éliminant t entre l'équation du foyer et l'équation de la conique C, nous obtiendrons l'équation aux coefficients angulaires des tangentes issues du point (x, y) :

$$\lambda[A(u^2 - m^2v^2) + 2(Cu + C'v)(ux + vy) + D(ux + vy)^2 + \lambda(u^2 + v^2)] - C''^2(ux + vy)^2 = 0.$$

(*) En effet la condition pour que le plan $ux + vy + wz + 1 = 0$ soit tangent à la surface représentée par

$$\frac{x^2}{a^2 + \lambda} + \frac{y^2}{b^2 + \lambda} + \frac{z^2}{c^2 + \lambda} - 1 = 0$$

est $$(a^2 + \lambda)u^2 + (b^2 + \lambda)v^2 + (c^2 + \lambda)w^2 - 1 = 0;$$

cette équation est du premier degré en λ.

En posant $u = 1$, $v = i$, nous aurons

$$\lambda[A(1 + m^2) + 2Cx - 2C'y + D(x^2 - y^2)] - C''^2(x^2 - y^2) = 0,$$
$$\lambda[C'x + Cy + Dxy] - C''^2xy = 0.$$

L'équation du lieu des foyers s'obtient en éliminant λ entre ces deux équations :

$$A(1 + m^2)xy + (Cy - C'x)(x^2 + y^2) = 0;$$

ce lieu est donc une cubique circulaire admettant le point O pour point double; les tangentes au point double étant rectangulaires, c'est une strophoïde.

Dans le cas particulier où le point O est un ombilic de la surface S, les droites OA, OB sont isotropes, $m^2 + 1 = 0$; le lieu se décompose en deux parties : la droite $Cy - C'x = 0$ et les droites isotropes passant par ce point O. Dans ce cas les coniques C ont leur foyer au point O; on a ainsi ce théorème : *Le plan tangent en un ombilic d'une quadrique coupe les quadriques homofocales de la proposée suivant des coniques qui ont cet ombilic pour foyer.*

3° Enveloppe des axes des coniques C.

Les coordonnées u, v, t des axes vérifient les équations $u\varphi'_v - v\varphi'_u = 0$, $\varphi'_t = 0$, ce qui donne

$$\lambda[A(1 + m^2)uv + (C - C'u)t] = 0, \qquad \lambda[Cu + C'v + Dt] - C''^2t = 0.$$

La première de ces équations montre que les axes des coniques C sont tangents à la parabole définie par l'équation

$$A(1 + m^2)uv + Cvt - C'ut = 0.$$

Les axes coordonnés sont tangents à cette parabole, par suite l'origine est un point de la directrice; on en déduit le foyer en abaissant une perpendiculaire de l'origine sur la corde des contacts avec le système des axes coordonnés.

P. Puig, professeur au lycée de Belfort.

---

165. — *Le centre des moyennes distances des quatre points d'intersection d'une droite avec une lemniscate de Bernoulli est le pied de la perpendiculaire abaissée du centre de la lemniscate sur la droite.*

Si l'on désigne par $\varphi(x, y)$ et $\psi(x, y)$ l'ensemble des termes de degré n et $n - 1$ du premier membre de l'équation d'une courbe de degré n, l'équation du diamètre de Newton conjugué d'une direction qui a pour paramètres directeurs α et β est

$$x\varphi'_\alpha(\alpha, \beta) + y\varphi'_\beta(\alpha, \beta) + \psi(\alpha, \beta) = 0.$$

Appliquons à la lemniscate qui a pour équation

$$(x^2 + y^2)^2 - a^2(x^2 - y^2) = 0.$$

On a $\qquad \varphi(x,y) \equiv (x^2 + y^2)^2, \quad \psi(x,y) \equiv 0;$

l'équation du diamètre devient $\qquad \alpha x + \beta y = 0;$

c'est l'équation de la droite menée par le centre et perpendiculaire à la direction (α, β).

Bourrienne, à Rouen; A. Duhameaux (lycée d'Amiens) et Enrique Valdès, à Paris.

On peut se proposer de chercher les courbes algébriques qui jouissent de cette propriété. On doit avoir pour toutes valeurs de α et de β $\qquad \psi(\alpha,\beta) \equiv 0,$

$$\frac{\varphi'_\alpha(\alpha, \beta)}{\alpha} \equiv \frac{\varphi'_\beta(\alpha, \beta)}{\beta}.$$

il ne doit donc pas y avoir de termes de degré $n - 1$, et l'ensemble des termes de degré n doit satisfaire à l'équation

$$\frac{\varphi'_x(x,y)}{x} = \frac{\varphi'_y(x,y)}{y} = \frac{n\varphi(x,y)}{x^2 + y^2}.$$

On en tire
$$\frac{\varphi'_x}{\varphi} = \frac{nx}{x^2 + y^2}.$$

Intégrons, x étant la variable et en considérant y comme constant, on obtient

$$\mathrm{L}\varphi = \frac{n}{2}\,\mathrm{L}(x^2 + y^2) + \mathrm{L}f(y).$$

Les constantes introduites dans l'intégration doivent être des fonctions arbitraires de y.

On en déduit
$$\varphi = (x^2 + y^2)^{\frac{n}{2}} f(y).$$

On obtiendrait par un procédé semblable, en considérant la relation

$$\frac{\varphi'_y}{\varphi} = \frac{ny}{x^2+y^2},$$

$$\varphi = (x^2 + y^2)^{\frac{n}{2}} g(x).$$

$f(y)$ et $g(x)$ ne peuvent donc être que des constantes, et comme φ est une fonction entière, n doit être pair et φ se réduit à une puissance de $x^2 + y^2$.

---

168. — *On donne le foyer ou le sommet d'une parabole passant par un point fixe, ou tangente à une droite fixe. Trouver dans chacun de ces cas le lieu du sommet ou du foyer.*

SOLUTION ANALYTIQUE

1° *On donne le foyer* F *et un point fixe* P.

Je prends le point F pour origine, FP pour axe des x, et pour axe des y une droite perpendiculaire. Désignons par ρ et ω les coordonnées polaires du sommet; l'équation de la parabole est

$$x^2 + y^2 = (x\cos\omega + y\sin\omega - 2\rho)^2. \qquad (1)$$

En écrivant qu'elle passe par le point P, d'abscisse a, on obtient l'équation du lieu du sommet :

$$a^2 = (a\cos\omega - 2\rho)^2$$

ou
$$\rho = \frac{a}{2}(\cos\omega \pm 1).$$

En prenant successivement les deux signes, on a deux équations dont l'une se déduit de l'autre en changeant ρ en $-\rho$ et ω en $\pi + \omega$; ces deux équations représentent donc la même courbe. C'est une cardioïde qui a le point F pour point de rebroussement et le point P pour sommet.

2° *On donne le foyer* F *et une tangente fixe* Δ.

F étant toujours l'origine des axes rectangulaires, prenons pour axe des x une perpendiculaire à Δ.

La parabole est représentée par l'équation (1), ρ et ω désignant toujours les coordonnées polaires du sommet. Nous aurons l'équation du lieu du sommet en écrivant que la parabole est tangente à la droite Δ, qui a pour équation $x - d = 0$. Pour cela, nous faisons $x = d$ dans l'équation (1) et nous

écrivons que l'équation obtenue en y a deux racines égales. On obtient sans peine

$$\rho = d \cos \omega,$$

équation qui représente le cercle décrit sur FA comme diamètre, A étant la projection de F sur Δ.

3° *On donne le sommet* S *et un point fixe* P.

Nous prenons le point S pour origine de deux axes rectangulaires dont l'un, Ox, passe par le point P

Soient ρ et ω les coordonnées polaires du foyer F. L'équation de la parabole rapportée à son axe et à sa tangente au sommet est

$$y'^2 - 4\rho x' = 0;$$

or, les formules de transformation de coordonnées donnent

$$x' = x \cos \omega + y \sin \omega,$$

$$y' = - x \sin \omega + y \cos \omega;$$

l'équation de la parabole devient alors

$$(x \sin \omega - y \cos \omega)^2 - 4\rho(x \cos \omega + y \sin \omega) = 0. \qquad (2)$$

En écrivant qu'elle passe par le point P, nous aurons le lieu. On obtient

$$\rho = \frac{a \sin^2 \omega}{4 \cos \omega},$$

équation d'une cissoïde ayant l'origine pour point de rebroussement, pour axe Ox, et pour asymptote la droite qui a pour équation $x = \frac{a}{4}$.

4° *On donne le sommet* S *et une tangente fixe* Δ.

J'écris que la parabole (2) est tangente à la droite $x = d$, c'est-à-dire que l'équation

$$(d \sin \omega - y \cos \omega)^2 - 4\rho(d \cos \omega + y \sin \omega) = 0$$

a une racine double en y. On obtient

$$\rho^2 \sin^2 \omega + d\rho \cos \omega = 0$$

ou, en coordonnées rectilignes,

$$y^2 + dx = 0,$$

qui est l'équation d'une parabole.

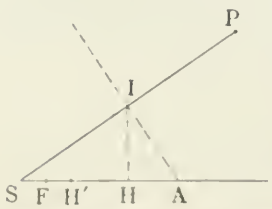
AUDIBERT, à Marseille.

Autre solution : MM. L. AUGÉ (Toulouse); H. CHERONNET; E. MAREY-MONGE (Louis-le-Grand).

SOLUTION GÉOMÉTRIQUE

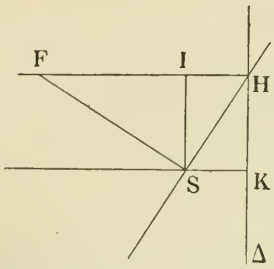
1° La directrice de la parabole est tangente au cercle de centre P et de rayon PF; par suite le pied H de la directrice décrit la podaire de ce cercle par rapport au point F, c'est-à-dire une cardioïde; alors le point S, milieu de FH, décrit une cardioïde homothétique qui a pour sommet le point P.

2° Projetons le point F en A sur Δ. La tangente au sommet passe par le point A; le sommet est donc sur le cercle de diamètre FA.



3° Par le milieu I de SP menons une perpendiculaire à SP qui rencontre l'axe d'une parabole au point A, et projetons le point I en H sur cet axe. On sait que AH est égal au paramètre. Si l'on prend SH' = AH, le point H' décrit une cissoïde, puisque le point H décrit le cercle de diamètre SI, et le foyer milieu de SH' décrit une cissoïde homothétique.

4° Menons par S la tangente au sommet SH d'une parabole quelconque; le foyer est à l'intersection de l'axe et de la perpendiculaire à Δ menée par le point H.



On a $\overline{SI}^2 = IF \times IH$,

le lieu du point F est donc une parabole qui a pour sommet le point S et pour paramètre $\frac{SK}{4}$.

A. Audouin, lycée de Bordeaux.

Ont résolu la même question : MM. E. N. Barisien; Bourrienne, à Rouen; Faucillon, collège Chapta Henri Loiseau, lycée de Clermont; Auzeram, (lycée Louis-le-Grand).

---

170. — *Lieu des foyers des coniques inscrites dans un quadrilatère circonscrit à un cercle.*

Prenons pour axes deux diamètres rectangulaires du cercle, son équation tangentielle est alors

$$R^2(u^2 + v^2) - w^2 = 0.$$

Soit maintenant $$au^2 + 2buv + cv^2 + 2duw + 2evw + fw^2 = 0 \qquad (1)$$

l'équation d'une conique inscrite dans le quadrilatère donné; l'équation générale des coniques inscrites sera

$$au^2 + 2buv + cv^2 + 2duw + 2evw + fw^2 + \lambda[R^2(u^2 + v^2) - w^2] = 0.$$

Les foyers de cette conique seront à l'intersection des deux hyperboles

$$(f - \lambda)(x^2 - y^2) - 2dx + 2ey + a - c = 0,$$
$$(f - \lambda)xy - ex - dy + b = 0.$$

En éliminant $f - \lambda$ entre ces deux équations, on obtient l'équation du lieu, qui peut s'écrire

$$(ex - dy)(x^2 + y^2) + b(y^2 - x^2) + (a - c)xy = 0.$$

Le lieu est une strophoïde qui a son point double à l'origine. L'asymptote est parallèle à la droite qui joint le point O au centre de la conique (1), c'est-à-dire à la droite joignant les milieux des diagonales du quadrilatère. Les tangentes à l'origine sont, comme il est aisé de le vérifier, les bissectrices des tangentes issues du point O à la conique (1). Ces droites sont les mêmes pour toutes les coniques du faisceau, car les tangentes issues du point O à toutes ces coniques forment deux faisceaux en involution, et parmi les couples de rayons homologues sont les droites isotropes; par conséquent les rayons doubles sont perpendiculaires, ce sont donc les bissectrices des couples de tangentes.

Remarquons en terminant que la strophoïde passe par les six sommets du quadrilatère complet qui sont les foyers des coniques infiniment aplaties du faisceau.

E. Bourrienne, à Rouen.

Nos jeunes lecteurs n'étant pas tous très familiarisés avec la théorie des coordonnées tangentielles, nous ajouterons quelques mots à la solution précédente.

Soit $$Au^2 + A'v^2 + A''w^2 + 2Bvw + 2B'wu + 2B''uv = 0 \qquad (1)$$

l'équation tangentielle d'une conique C. Cette équation exprime que la droite qui a pour équation

$$ux + vy + wz = 0$$

est tangente à la conique C; pour que cette tangente soit isotrope, il faut et il suffit qu'elle passe par l'un des points cycliques dont les coordonnées homogènes (axes rectangulaires) sont par exemple $x = i$, $y = 1$, $z = 0$ de sorte que les paramètres, c'est-à-dire les coordonnées d'une tangente isotrope, vérifient l'équation

$$ui + v = 0. \qquad (2)$$

En remplaçant v par $-ui$, dans l'équation (1) nous obtiendrons l'équation

$$(A - A' - 2B''i)u^2 + 2(B' - Bi)uw + A''w^2 = 0. \tag{3}$$

Mais si x et y sont les coordonnées d'un foyer situé sur la tangente isotrope considérée :

$$u(x - iy) + w = 0. \tag{4}$$

En éliminant u et w entre les deux équations précédentes, on a l'équation

$$A - A' - 2B''i - 2(B' - Bi)(x - iy) + A''(x - iy)^2 = 0. \tag{5}$$

D'ailleurs le foyer considéré est sur une seconde tangente isotrope, de sorte que ses coordonnées vérifient l'équation obtenue en changeant i en $-i$ dans l'équation (5), ce qui donne

$$A - A' + 2B''i - 2(B' + Bi)(x + iy) + A''(x + iy)^2 = 0. \tag{6}$$

Il en résulte que x et y vérifient les deux équations

$$A''(x^2 - y^2) - 2(B'x - By) + A - A' = 0,$$

$$A''xy - (Bx + B'y) + B'' = 0.$$

TANGENTE A LA LIGNE D'OMBRE PROPRE

D'UN SOLIDE DE RÉVOLUTION

1. — On détermine autant de points que l'on veut de cette ligne d'ombre propre en cherchant ceux qui sont situés sur un parallèle donné et faisant ensuite varier le plan de ce parallèle. Je me propose de donner une construction très simple de la tangente à la courbe en un de ces points, en supposant connu le rayon de courbure de la ligne méridienne au point situé sur le même parallèle.

2. — Soit en général

$$f(x, y, z) = 0 \tag{1}$$

l'équation d'une surface quelconque, S un point lumineux de coordonnées α, β, γ. Un point de la ligne d'ombre propre de la surface éclairée par ce point est le point de contact d'un plan tangent à la surface et passant par ce point S. Donc il vérifie l'équation

$$(x - \alpha)\frac{\partial f}{\partial x} + (y - \beta)\frac{\partial f}{\partial y} + (z - \gamma)\frac{\partial f}{\partial z} = 0. \tag{2}$$

L'ensemble des équations (1) et (2) représente la ligne d'ombre propre.

Pour en avoir la tangente en un point x, y, z il suffit de différentier (1) et (2) et d'y remplacer dx, dy, dz, respectivement par $X - x$, $Y - y$, $Z - z$; X, Y, Z étant les coordonnées courantes de la tangente cherchée.

L'équation (1) donne

$$(X - x)\frac{\partial f}{\partial x} + (Y - y)\frac{\partial f}{\partial y} + (Z - z)\frac{\partial f}{\partial z} = 0. \tag{3}$$

L'équation (2) donne, si l'on tient compte de (3),

$$\left|\begin{array}{l} (X-x)\left\{(x-\alpha)\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+(y-\beta)\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}+(z-\gamma)\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial z}\right\} \\ +(Y-y)\left\{(x-\alpha)\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}+(y-\beta)\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}+(z-\gamma)\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial z}\right\} \\ +(Z-z)\left\{(x-\alpha)\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial z}+(y-\beta)\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial z}+(z-\gamma)\dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right\} \end{array}\right| = 0. \qquad (4)$$

L'ensemble des équations (3) et (4) représente la tangente demandée.

3. — Appliquons ces formules générales au cas d'une surface de révolution. En prenant pour axe des z l'axe de révolution, on peut mettre l'équation de la surface sous la forme

$$f(\sqrt{x^2+y^2})-z=0,$$

en supposant que $f(x)-z=0$ est l'équation de la ligne méridienne située dans le plan des zx. Pour abréger nous poserons $u=\sqrt{x^2+y^2}$.

L'équation (4) se réduit à

$$(X-x)\left\{(x-\alpha)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+(y-\beta)\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right\}+(Y-y)\left\{(x-\alpha)\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+(y-\beta)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right\}=0, \quad (4\ bis)$$

qui est l'équation de la projection de la tangente sur un plan xoy perpendiculaire à l'axe. Comme on sait que la tangente cherchée est située dans le plan tangent à la surface au point x, y, z, comme il suffit pour notre objet de savoir construire cette projection, et comme on en connaît déjà un point, qui est la projection du point considéré de la ligne d'ombre, il suffit de savoir en construire un autre point.

L'équation (4 *bis*) se simplifie :

on a

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{x^2}{u^2}f''(u)+\frac{y^2}{u^3}f'(u),$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x\partial y}=\frac{xy}{u^2}f''(u)-\frac{xy}{u^3}f'(u),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{y^2}{u^2}f''(u)+\frac{x^2}{u^3}f'(u).$$

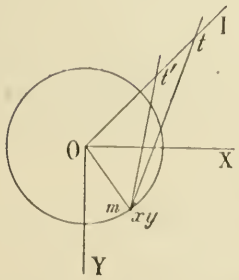
(4 *bis*) devient donc

$$\left.\begin{array}{l} uf''(u)\left\{(X-x)[(x-\alpha)x^2+(y-\beta)xy]+(Y-y)[(x-\alpha)xy+(y-\beta)y^2]\right\} \\ +f'(u)\left\{(X-x)[x-\alpha)y^2-(y-\beta)xy]+(Y-y)[(-(x-\alpha)xy+x^2(y-\beta)]\right\} \end{array}\right\}=0,$$

ou

$$uf''(u)\,(x^2+y^2-\alpha x-\beta y)\{Xx+Yy-u^2\}+f'(u)(\beta x-\alpha y)\{Xy-Yx\}=0. \qquad (5)$$

$Xx+Yy=0$ est la perpendiculaire OI menée par le centre O de la projection du parallèle au rayon Om passant par la projection du point d'ombre considéré; cherchons son intersection t avec la projection mt de la tangente cherchée. De (5) on tire pour l'abscisse x' de ce point t



$$x'=\frac{uf''(u)(u^2-\alpha x-\beta y)}{(\beta x-\alpha y)f'(u)}.$$

4. — Considérons maintenant une autre surface de révolution de même axe et engendrée par une ligne méridienne tangente à celle de la surface donnée, au point situé sur le parallèle considéré. Le point m appartiendra aussi à la ligne d'ombre propre de cette nouvelle surface éclairée par le même point S; mais la projection de la tangente à cette ligne d'ombre sera généralement différente de mt, soit mt'.

Désignons par $\varphi(u) - z = 0$ l'équation de cette surface auxiliaire ; on aura maintenant pour l'abscisse x'' de t'

$$x'' = \frac{uy\varphi''(u)(u^2 - \alpha x - \beta y)}{(\beta x - \alpha y)\varphi'(u)},$$

$u, x, y, \alpha, \beta, \gamma$ sont les mêmes et on a aussi $f'(u) = \varphi'(u)$ parce que les méridiennes se touchent ; donc

$$\frac{x'}{x''} = \frac{f''(u)}{\varphi''(u)},$$

ou

$$\frac{\overline{Ot}}{\overline{Ot'}} = \frac{f''(u)}{\varphi''(u)}.$$

Soient ρ et R les rayons de courbure des deux méridiennes considérées ; on a

$$\frac{1}{\rho} = \pm \frac{f''(u)}{\sqrt{\{1 + f'(u)\}^3}},$$

$$\frac{1}{R} = \pm \frac{\varphi''(u)}{\sqrt{\{1 + \varphi'(u)\}^3}};$$

Donc

$$\frac{\overline{Ot}}{\overline{Ot'}} = \pm \frac{R}{\rho}.$$

Le signe + convenant au cas où les rayons de courbure doivent être portés dans le même sens, le signe — au cas contraire. On peut prendre pour surface auxiliaire la sphère engendrée par la circonférence ayant pour rayon R, la portion de normale à la ligne méridienne, comprise entre le pied et l'axe de révolution; on sait construire la ligne d'ombre pour cette sphère; c'est un cercle de la sphère, donc on connaît mt', par suite $\overline{Ot'}$; pour avoir $\overline{Ot}$ et par suite mt, on voit qu'il suffit de connaître ρ en grandeur et en sens.

C'est ce que l'on sait pour le tore et plus généralement pour la surface de révolution dont la ligne méridienne est une conique.

5. — Observons que la construction est indépendante de α, β, γ, c'est-à-dire de la position du point lumineux; on peut le supposer à l'infini dans une direction quelconque. Enfin, observons que, réciproquement, si l'on connaît par un moyen quelconque la tangente mt, on peut en déduire le rayon de courbure ρ en grandeur et en direction.

E. Jablonski, professeur au lycée Charlemagne.

CONCOURS DE 1892 *(Suite).*

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES

Mathématiques spéciales.

188. — Étant donnés un ellipsoïde E, de centre O, et un cône du second ordre Q, de sommet S, on considère un trièdre $O\alpha\beta\gamma$, dont les arêtes forment un système de diamètres conjugués de l'ellipsoïde, et on prend le point d'intersection de chaque arête de ce trièdre avec le plan diamétral qui lui est conjugué dans le cône Q. On obtient ainsi trois points A, B, C qui déterminent un plan P.

1° Démontrer que le plan P passe par un point fixe F, quand le trièdre $O\alpha\beta\gamma$ varie.

2° Les points S et F déterminent une droite D; trouver le lieu des droites D qui passent par un point donné ω, lorsque le cône Q se déplace en restant égal et parallèle à un cône fixe.

3° Trouver, dans la même hypothèse, l'enveloppe G des droites qui sont situées dans un plan donné H.

4° Trouver le lieu des foyers des courbes G, lorsque le plan H se déplace en restant parallèle à une droite donnée.

ÉCOLE DES MINES DE SAINT-ÉTIENNE

Géométrie analytique.

189. — On donne deux droites rectangulaires Ox, Oy.

On prend sur Ox un point A, sur Oy un point B, de telle sorte que $OA = OB$.

On considère toutes les coniques tangentes en A à Ox et en B à Oy.

On demande :

1° L'équation générale de ces coniques;

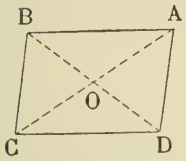
2° Le lieu de leurs sommets;

3° Le lieu de leurs foyers. (Ce dernier lieu devra être déterminé par la géométrie et par le calcul.)

(1er août de 8 h. à midi.

Calcul trigonométrique.

Calculer les côtés, les angles et la surface du parallélogramme dont on donne



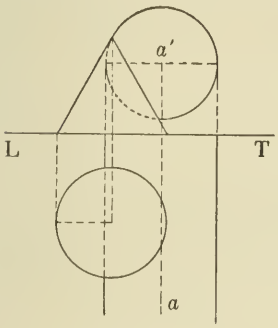
$$AB = 306^m7855, \qquad \widehat{ABD} = 38^\circ\ 12'\ 47''\ 54, \qquad OB = 175^m306,$$

O étant le point de rencontre des diagonales.

(1er août, de 3 h. à 4 h.)

Géométrie descriptive.

Intersection d'un cylindre de révolution dont l'axe A est perpendiculaire au plan vertical, avec un cône de révolution dont l'axe est perpendiculaire au plan horizontal, une génératrice du cylindre passant par le sommet du cône et l'axe du cylindre étant situé au-dessous de ce sommet. — Développer les deux surfaces jusqu'à la courbe d'intersection.



On mènera la tangente en un point de l'intersection et la tangente au même point dans le développement.

(3 août, de 8 h. à midi.)

Physique et Chimie.

I. — **190.** On donne un cylindre vertical, à section circulaire, qui renferme un piston et peut être mis en communication par le bas avec l'air libre, par le haut avec une machine pneumatique ou avec l'air libre.

Le piston étant au bas de sa course et les communications étant établies par le bas avec l'air extérieur, par le haut avec la machine pneumatique, on demande de déterminer :

1° Le temps nécessaire pour arriver à mettre le piston en équilibre;

2° La pression correspondante au-dessus du piston;

3° La vitesse et la durée de l'ascension.

On négligera la variation de la pression atmosphérique sur la hauteur du tube et on considérera le frottement du piston sur les parois du cylindre comme exprimé par un certain nombre de kilogrammes dont on tiendra compte dans le poids du piston.

Application :	D, diamètre du cylindre	$1^m,60$
	L, longueur du cylindre	600^m
	P, pression atmosphérique	10000^{kg} par mètre carré.
	ϖ, poids du piston	10000^{kg}
	f, frottement du piston	500^{kg}
	V, volume des deux cylindres de la machine pneumatique	30^{mc}
	N, nombre de tours de la machine par minute	24

II. — **191.** On prend un tube de verre bien cylindrique de 1^m de long, dont la section intérieure est de 1^{cq} et dont la section extérieur est de 2^{cq}, en sorte que la section du verre soit de 1^{cq}.

Le tube étant supposé fermé à une de ses extrémités par un fond plat, sans épaisseur et sans poids, on remplit ce tube de mercure, on le renverse dans une cuve profonde, on y introduit 10^{cc} d'air à la pression et à la température ambiantes et on l'abandonne à lui-même dans une position verticale.

On demande :

1° Quel sera le volume de l'air intérieur;

2° Quelle sera la différence de niveau du mercure dans l'intérieur du tube et à l'extérieur.

On prendra pour densité du mercure 13,6, pour densité du verre 2,49 et pour pression extérieure 0^m66.

III. — Combien faut-il prendre de chlorate de potasse pour préparer un mètre cube d'oxygène sec à la température de 15° et à la pression de 720^{mm} de mercure?

$$K = 39, \qquad Cl = 35,5, \qquad O = 16.$$

(2 août, de 8 h. 1/2 à 11 h. 1/2.)

QUESTIONS PROPOSÉES

*192. — On inscrit un rectangle dans un demi-cercle et l'on construit sur le côté parallèle au diamètre un triangle rectangle et isocèle. Étudier la variation du pentagone obtenu.

(E. Dessenon.)

193. — Étant donné un limaçon de Pascal et un cercle Γ ayant pour centre le point double O du limaçon, une tangente quelconque au cercle Γ coupe le limaçon en quatre points A, B, C, D. Démontrer la relation

$$OA + OB + OC + OD = \text{const.}$$

$$OA.OB.OC.OD = \text{const.}$$

(E. N. Barisien.)

194. — On considère une cissoïde de Dioclès et une strophoïde droite ayant même cercle directeur et même point double O. Une sécante coupe la cissoïde aux points A, B, C et la strophoïde aux points A′ B′ C′. Démontrer la relation

$$\frac{OA.OB.OC}{OA'.OB'.OC'} = \frac{1}{2}.$$

(E. N. Barisien.)

195. — Trouver le lieu des points tels qu'en menant des tangentes à une cardioïde donnée, la somme des rayons vecteurs joignant le point de rebroussement aux points de contact des tangentes soit constante; 2° trouver le lieu des points tels que le produit des mêmes rayons vecteurs soit constant.

(E. N. Barisien.)

196. — Trouver le lieu des points tels qu'en menant des normales à une cardioïde, la somme des inverses des rayons vecteurs joignant le point de rebroussement aux pieds des normales soit constante.

(E. N. Barisien.)

197. — Trouver l'enveloppe d'une droite telle que ses points de rencontre avec une cissoïde donnée et avec l'axe de symétrie de cette courbe forment une division harmonique.

(E. N. Barisien.)

198. — Trouver l'enveloppe de la droite telle que ses points de rencontre avec un folium de Descartes et avec l'une des tangentes au point double forment une division harmonique.

(E. N. Barisien.)

Le Rédacteur-Gérant : H. VUIBERT.

Paris. — Imprimerie Chaix. — 20616-9-02

TABLE DES MATIÈRES

(Années 1890-91 & 1891-92)

ALGÈBRE

Numéros des questions.		Pages.
4, 5	Exercices sur les déterminants. . . . 25,	26
35	Propriété d'un déterminant symétrique gauche	93
36, 39	Exercices sur les séries . . . 65, 80, 81,	82
181	Valeur approchée d'une série	350
26	Somme des produits p à p des termes d'une progression géométrique.	50
7	Forme d'une imaginaire de module 1. . .	27
8, 9	Identités sur les combinaisons.	45
40	Nombre de coniques passant par cinq des n points d'un plan.	66
12, 180	Variations de fonctions 77,	349
53	Limite d'une expression.	118
6	En éliminant u et v entre $x = \varphi(u, v)$, $y = \varphi_1(u, v)$, $z = \varphi_2(u, v)$, on obtient $F(x, y, z) = 0$; calculer des nombres proportionnels à F'_x, F'_y, F'_z.	27
136	Calcul d'une intégrale définie	294
127	Condition pour que la forme binaire biquadratique soit égale à une somme de deux quatrièmes puissances.	272
122	Recherche d'un polynôme $P(x)$ tel que $f(x) + P\varphi'(x)$ soit divisible par $\varphi(x)$. . .	253
10	Résolution d'une équation du quatrième degré.	46
131	Si $g(u, v)$ admet le facteur $(x - a)^p$, $g(u', v')$ admet le facteur $(x - a)^{p-1}$, $g(u, v)$ étant une fonction entière homogène et u, v des polynômes premiers entre eux.	301
137	Montrer qu'une équation a toutes ses racines réelles.	339
75	Condition pour que deux équations ne puissent avoir une racine commune sans en avoir deux.	205
11	Séparer les racines d'une équation transcendante	49

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE A DEUX DIMENSIONS

Numéros des questions.		Pages.
13	Propriétés de trois circonférences et d'un triangle	67
41	Propriété du quadrilatère inscriptible . .	100
66	Position d'un point par rapport à un triangle.	196
76	On donne quatre droites qui se coupent en six points; déterminer quatre de ces points qui sont sommets d'un quadrilatère convexe	207
42	Lieu du centre de gravité d'un quadrilatère variable 118,	146
54, 90 à 92, 140, 146, 147	Exercices et lieux géométriques divers sur des circonférences. 125, 213, 214, 313,	367
15	Exercices divers sur une droite dont l'équation renferme un paramètre. . . .	68
55	Lieu des points limites de deux cercles tangents à deux cercles fixes.	127
128	Lieu du centre et enveloppe d'un cercle autopolaire par rapport à un triangle inscrit et circonscrit à deux cercles. . .	304
133	Lieu du centre d'un cercle inscrit à un quadrilatère variable	332
16	Coniques dans lesquelles à deux directions perpendiculaires correspondent des diamètres perpendiculaires	28
27	Paraboles passant par deux points, dont l'axe et la tangente au sommet passent par des points fixes.	72
28	Exercices divers sur des coniques variables tangentes à un cercle	94
43	Lieu du centre de gravité d'un triangle équilatéral inscrit ou circonscrit à une conique.	101
77	Lieu du troisième sommet d'un triangle circonscrit à une conique dont deux sommets décrivent une autre conique .	207
83, 125	Exercices sur des ellipses concentriques ayant mêmes directions d'axes (lieu et enveloppe). 211,	258
81	Lieu du centre d'une hyperbole équilatère tangente à une parabole.	239
82	Exercices et lieux sur des coniques dont l'équation renferme un paramètre. . .	244
17	Lieu du centre d'une hyperbole équilatère passant par deux points.	54
124	Hyperboles équilatères conjuguées par rapport à un triangle, lieux géométriques.	280

Numéros des questions.		Pages.
123	Application du théorème de Frégier. . .	301
129	Lieu du centre d'une hyperbole équilatère circonscrite à un quadrilatère inscrit et circonscrit à deux cercles	303
132	Exercices et lieux divers sur une conique à centre.	306
144	Enveloppe de la corde de contact à deux coniques circonscrites à deux triangles.	326
134	Exercices divers sur les tangentes issues de deux points à deux coniques. . . .	355
67	Quadrilatère circonscrit à une ellipse et inscrit à un cercle.	198
89	Cercle tangent à une ellipse à l'extrémité du grand axe. Calcul d'une longueur. .	212
182	Lieu du point de concours des normales à une ellipse aux extrémités des deux diamètres conjugués	351
19, 46	Exercices sur les normales issues d'un point à une ellipse. 28, 56,	57
29, 78	Quadrilatère formé par les tangentes à une ellipse aux pieds des normales issues d'un point. Condition pour qu'il soit circonscriptible ou inscriptible . . 86,	209
142	Quadrilatère formé par les quatre points de rencontre avec une ellipse (autres que les pieds) des normales issues d'un point.	313
143	Cercles passant par les pieds des normales issues d'un point à une parabole et par les trois autres points de rencontre de la courbe et des normales	314
56	Lieu des pieds des normales issues d'un point à une parabole	163
183	Lieu du milieu de la portion d'une normale à une hyperbole équilatère comprise entre le pied et une asymptote . .	352
30	Coniques inscrites et circonscrites à un triangle; lieux de points de concours de normales	96
18	Coniques homofocales; exercices.	70
135	Lieu des points de concours de tangentes communes aux coniques ayant pour foyers les sommets d'un quadrilatère circonscriptible	310
184	Lieu du deuxième foyer d'une conique ayant un foyer fixe et passant par deux points	352
170	Lieu des foyers des coniques inscrites dans un quadrilatère circonscriptible	375
168	Lieu du sommet ou du foyer d'une parabole variable	373
65	Aire d'une boucle.	169
68	Construction d'une courbe.	197
114	Exercice sur les courbes en général . . .	262
139	Exercices sur la courbe $y = x^3$	311
138	Exercices sur la courbe $x^3 = 3ay^2$. . . .	322
71	Propriétés de la strophoïde	200
126	Propriété de la développée de l'ellipse 249,	257
93, 165	Propriétés de la lemniscate 254,	372

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE A TROIS DIMENSIONS

57	Lieu des sommets des cônes circonscrits à un ellipsoïde et coupés par un plan suivant des cercles	128
130	Condition pour que deux normales à une quadrique se rencontrent	305
187	Trouver les coordonnées d'un point après rotation autour d'une droite.	365
58	Lieu des centres de quadriques passant par deux cercles. Lieu des axes des paraboloïdes	129
151	Lieu des centres, des foyers, enveloppe des axes des sections planes de surfaces homofocales.	370
145	Lieu du point de concours de hauteurs d'un tétraèdre à arêtes opposées orthogonales circonscrit à un paraboloïde . .	328
107	Intersection de deux tores	274
149	Évaluation d'un volume.	341

DIVERS

44	Aire latérale d'un cône de révolution . .	103
31	Volume d'un cône de révolution	230
111, 112, 113	Formules entre les éléments d'un triangle. 231, 233,	234
45	Exercice sur un appareil à eau de seltz. 104,	169

NOTES ET COMMUNICATIONS

Sur les expressions indéterminées fonctions algébriques irrationnelles de la variable	17
Note sur la formule de Taylor.	237
Sur le développement des racines carrées en fractions continues	269
Résolution d'un système d'équations.	317
Démonstration d'un théorème de Joachimstal. . .	146
Note sur la théorie des enveloppes.	260
Intersection de deux coniques. — Équation en λ.	285
Note sur les cubiques unicursales	342
Tangente à la ligne d'ombre propre d'un solide de révolution	376

Pages.

EXAMENS ET CONCOURS

Agrégation des sciences mathématiques :
Année 1890. . . . . 8, 109, 139
— 1891. . . . . 172, 221
— 1892. 378

Bourses de licences :
Année 1890 Mathématiques 76
— — Physique 124, 183
— 1891 Mathématiques. 154, 215
— — Physique 155

Certificat d'aptitude à l'enseignement secondaire spécial :
Années 1890 1re Session 92, 177
— — 2e Session. 92, 180
— 1891 1re Session. 172, 247
— — 2e Session. 236, 296, 358

Concours général : (classe de Mathématiques spéciales) :
Année 1890 Mathématiques 36
— — Physique 40
— — Chimie 59
— 1891 Mathématiques. 154, 173
— — Physique 139
— — Chimie 140
— 1892 Mathématiques. 329
— — Physique 329
— — Chimie 330

ÉCOLES

École Normale supérieure :
Année 1884. 50
— 1889. . . . . 108, 134
— 1890. . . . . 23, 62, 110
— 1891. . . . . 156, 171, 193
— 1892. 347

Pages.

École Polytechnique :
Année 1890. . . . . 1, 63, 132
Année 1891. . . . . 153, 189, 251
— 1892. 330
Questions d'examens résolues. 349, 365

École des Ponts et Chaussées :
Année 1890. . . . . 30, 79, 83, 89, 116
— 1891. . . . . 203, 271, 295

École Centrale des Arts et Manufactures :
Année 1890. 1re session. 6, 33, 74, 218
— — 2e session. 75, 147, 150
— 1891. 1re session. 185, 227
— — 2e session. 219, 264
— 1892. 1re session 363

École des Mines de Saint-Étienne :
Année 1890. . . . . 106, 201, 206, 239
— 1891. . . . . 186, 275
— 1892. 379

École Navale :
Année 1890. 20
— 1891. . . . . 141, 154, 157
— 1892. . . . . 331, 333

QUESTIONS POSÉES AUX EXAMENS ORAUX

École Normale supérieure :
Année 1890. . . . . 12, 29
— 1891. . . . . 184, 281, 298

École Polytechnique :
Année 1890. . . . . 46, 61, 73, 120, 136

École Centrale :
Année 1890. . . . . 153, 170

École des Mines de Saint-Étienne :
Année 1890. 14
— 1891. 267

NOMS D'AUTEURS

Alayrac (A.), 311, 332.
Aubert (P.), 107.
Audibert, 169, 268, 304, 322, 374.
Audouin (A.), 63, 124, 126, 284, 375.
Auzeram, 101, 279.
Barbarin (P.), 92, 321.
Barisien (E.-N.), 108, 124, 140, 202, 208, 294, 316, 331, 348, 380.
Barriol (A.), 246.
Baudoin (N.), 284, 306.
Baudran (E.), 50, 116, 132.
Bessart (J.), 127.
Bitancourt (E.), 220.
Blondel (A.), 252, 305.
Boé (L.), 332, 370.
Borel (E.), 5, 47, 54, 93, 107.
Boulanger, 283.
Bourlet (C.), 47, 66.
Bourrienne (E.) 239, 266, 326, 372, 375.
Brillouin (M.), 184, 188.
Cadenat (A.), 316.
Caltaux (P.), 43.
Cartan (E.), 226.
Charruit (N.), 91.
Chedeville, 78.
Cluzet (J.), 129, 169.
Cot (D.), 313.
Cretin (E.), 331.
Cuny (G.), 318.
Darboux (J. G.), 32, 46, 53, 70, 98.
Descombes, 87, 213.
Desprès (A.), 172.
Dessenon (E.), 22, 145, 163, 246, 339, 380.
Dumas (A.), 207.
Duporcq (E.), 73, 195, 212, 220, 252, 257, 258, 259, 284, 309, 328, 329.
Durand (A.), 192, 201, 236, 268.
Genese (R. W.), 48, 56.
Gérard, 298.
Gilbert (R.), 140.
Goulard (A.), 56.
Gutsche (Dr.), 48, 110.
Hais (J.), 313.
Hugon (C.), 80, 100, 252, 332.
Hugron (A.), 76, 220.
Hisson (E.), 66, 257.
Jablonski (E.), 187, 264, 378.
Jacquest (E.), 98, 191, 202, 210.
Jamet (V.), 48, 269.
Jordan (P.), 176.
Jossinet (E.), 118, 218.
Koenigs (G.), 285, 298.
L. (A.), 25.
Lafolie, 136.
Laforgue (R.), 55.
Landrin, 279.
Larose (H.), 72.
Latiès (S.), 327, 332
Lecocq (H.), 16.
Lecoquierre (A.), 182.
Leduc (A.), 45, 48.
Lemoine (E.), 187, 232, 234, 235
Lemoult (P.), 128.
Leray, 28.
Lerch, 48.
Lévy, 150, 272, 296.
Luc (A.), 120.
Maluski (A.), 12, 267, 358.
Marey-Monge (E.), 106.
Marix (L.), 314.
Maury (L.), 281.
Messent (L.), 8, 134, 153.
de Montille (H.), 25, 26, 27, 45, 50, 99.
Mosnat (E.), 16.
N. (B.), 4, 57, 91, 147, 177, 205, 262.
Niewenglowski (B.), 60, 170, 184, 332.
Niewenglowski (H.), 60, 170, 184.
Papelier (G.), 19, 59.
Perrée (L.), 201, 206, 208, 217, 255, 256, 311.
Perrin (J.), 179, 198, 199.
Philippe (L.), 213.
Pilleux (H.), 64, 66, 89, 102, 128, 192, 252.
Ploix, 165.
Pouillart (A.), 96.
Pradet (F.), 268.
Prime (Ve F.), 104, 268.
Puig (P.), 29, 32, 67, 300, 372.
Raffy (L.), 29.
Randon (L. P.), 28, 70, 85, 215, 244, 275, 295, 332.
Ravier (L.), 38.
Raynaud (G.), 254.
Rech (C.), 73, 195, 249.
Richard (J.), 180.
Ripault (Ch.), 301.
Ripert, 220.
Santacroce (G.), 341.
Solente, 250, 310, 314.
T. (A.), 36.
Tannery (J.), 12, 181.
Teixeira (G.), 236.
Turchi (Ch.), 370.
Valdès (E.), 372.
Verrina (G. B.), 103, 300
Vigneaux (J.), 82, 164, 208, 213, 214.
Weyr (E.), 47.

PARIS — IMPRIMERIE CHAIX. — 24718-10-92.

QA
1
R486
année 2

Revue de mathématiques
spéciales

~~Physical & Applied Sci. Serials~~

Math

PLEASE DO NOT REMOVE
CARDS OR SLIPS FROM THIS POCKET

UNIVERSITY OF TORONTO LIBRARY